

3. TEMA

NİCELİKLER VE DEĞİŞİMLER (1)

3.1. Trigonometrik Fonksiyonlar Ve Nitel Özellikleri

3.2. Trigonometrik Fonksiyonlarla İfade Edilebilen Denklemler İçeren Problemler

Anahtar Kavramlar

- | | | |
|----------------------|--------------------------|---------------------------|
| • artanlık-azalanlık | • maksimum-minimum değer | • radyan |
| • birim çember | • maksimum-minimum nokta | • trigonometrik fonksiyon |
| • derece | • periyot | • yönlü açı |
| • esas ölçü | | |

Sembol ve Gösterimler

- | | | |
|---------------|------------|------------|
| • 2π | • $\cot x$ | • T |
| • 360° | • $\sin x$ | • $\tan x$ |
| • $\cos x$ | | |

Bu temada sizden

- $f(x) = \sin x (x \in \mathbb{R})$, $f(x) = \cos x (x \in \mathbb{R})$, $f(x) = \tan x (x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$ ve $f(x) = \cot x (x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonların nitel özellikleri ile bu fonksiyonlardan türetilen $g(x) = k \cdot f(mx \pm r) \pm s (k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0)$ trigonometrik fonksiyonların nitel özelliklerine ilişkin matematiksel muhakeme yapabilmeniz,
- trigonometrik fonksiyonlarla ifade edilebilen denklemleri içeren problemleri çözebilmeniz beklenmektedir.

Tema boyunca sizden çalışma kâğıtlarındaki soruları çözmeniz, araştırma ödevi ve performans görevlerini yerine getirmeniz, ölçme ve değerlendirme sorularını cevaplamanız istenmektedir.



3. Tema karekodu



3. Tema Sunusu'na yandaki
karekoddan ulaşabilirsiniz.

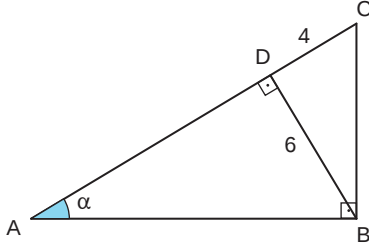


Başlarken

Trigonometri, üçgenlerin kenar uzunlukları ile açı ölçüleri arasındaki ilişkileri ortaya koyan bir matematik disiplini. Dik üçgenlerin iç açılarının ölçüleri ve kenar uzunlukları arasındaki matematiksel ilişki; tarih boyunca denizcilik, haritacılık ve astronomi gibi alanlarda karşılaşılan sorunları pratik şekilde çözmek için kullanılmıştır. Örneğin geçmişte denizciler, yıldızların konumlarını hesaplamak ve rotalarını belirlemek için trigonometrik hesaplamalara başvurmuşlardır. Aynı şekilde haritacılar, dağların yükseklikleri ve birbirine olan uzaklıklarını ölçmek için trigonometrik hesaplamalardan faydalanmışlardır.

Ön Değerlendirme

1.



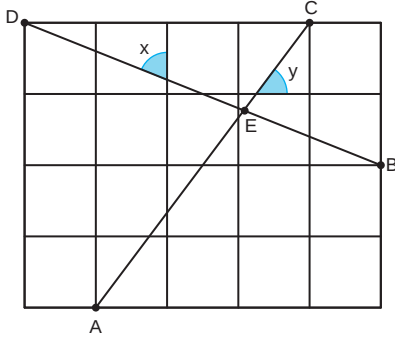
Yandaki ABC dik üçgeninde $[AB] \perp [BC]$, $[BD] \perp [AC]$;

A, D ve C noktaları doğrusal ve $m(\widehat{BAC}) = \alpha$ dir.

$|BD| = 6$ birim ve $|DC| = 4$ birim olduğuna göre $\frac{1 - \cot \alpha}{\cos \alpha}$

ifadesinin değerini bulunuz.

2.

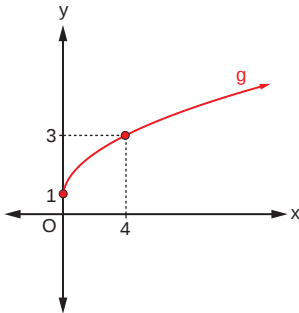


Yandaki şekil 20 eş birim kareden oluşmaktadır. $[BD]$ ve $[AC]$ şeklindeki gibi birim karelerin kenarları ile yaptığı dar açılarının ölçüleri derece türünden sırasıyla x ve y dir.

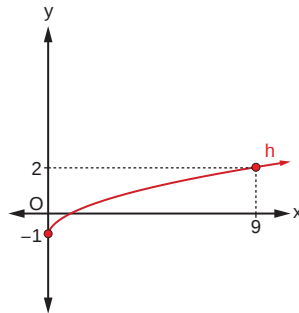
Buna göre $\frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

3. Aşağıda uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x) = \sqrt{x}$ karekök referans fonksiyonundan türetilen fonksiyonların grafikleri bulunmaktadır.

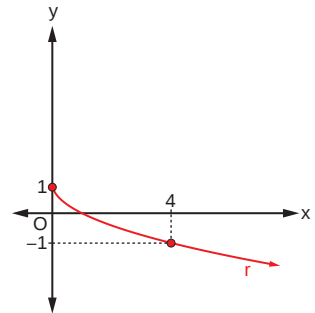
Buna göre g , h ve r fonksiyonlarının cebirsel temsillerini altlarına yazınız.



$g(x) =$



$h(x) =$

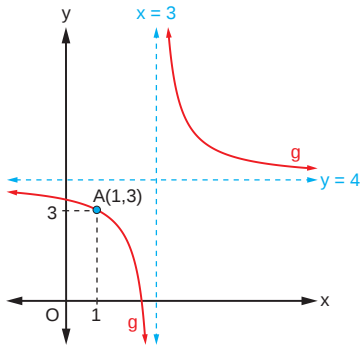


$r(x) =$

4. Aşağıdaki tabloda verilen fonksiyonların nitel özelliklerini bularak ilgili boşlukları doldurunuz.

Nitel Özellikler		$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 3x - 6$	$g: (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ $g(x) = \sqrt{x + 2}$	$h: \mathbb{R} \rightarrow [5, \infty)$ $h(x) = x^2 + 2x + 6$	$k: (-\infty, 6) \rightarrow \mathbb{R}$ $k(x) = \frac{1}{6-x} + 3$
Tanım Kümesi					
Görüntü Kümesi					
Bire Bir Olma Durumu					
Örten Olma Durumu					
Teklik-Çiftlik					
Maksimum Noktası ve Değeri					
Minimum Noktası ve Değeri					
Artanlık-Azalanlık					
Sıfırları					
İşareti	(+)				
	(-)				

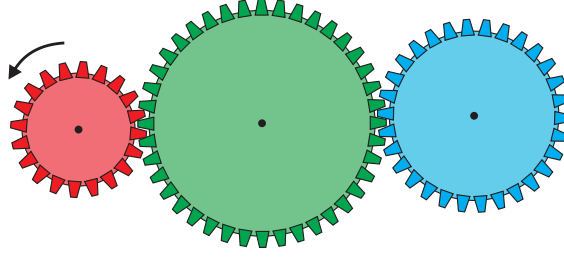
5.



$f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlanan f rasyonel referans fonksiyonuna uygulanan dönüşümler sonucunda oluşan $g(x) = \frac{a}{x+b} + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) fonksiyonunun grafiği, yandaki dik koordinat sisteminde verilmiştir.

Buna göre $a \cdot b - c$ ifadesinin değerini bulunuz.

6.

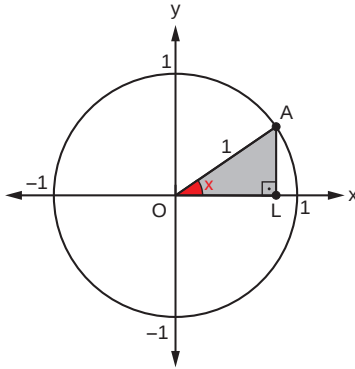


Yukarıda birbirini çeviren üç dişli çark gösterilmiştir. Soldaki çarkın yarıçapı 20 cm, ortadaki çarkın yarıçapı 40 cm, sağdaki çarkın yarıçapı 30 cm uzunluğundadır. Soldaki çarkın ok yönünde 120° dönmesi durumunda

a) Ortadaki çarkın pozitif ya da negatif yönde kaç derece döneceğini bulunuz.

b) Sağdaki çarkın pozitif ya da negatif yönde kaç derece döneceğini bulunuz.

7.



Yandaki şekilde dik koordinat eksenine üzerine yarıçapı 1 metre olan, O merkezli çember çizilmiştir.

OLA dik üçgeninde $m(\widehat{AOL}) = x$ ve $\tan x = \frac{3}{4}$ olarak verilmiştir.

OLA dik üçgeninin, O merkezi etrafında pozitif yönde 90° döndürülmesiyle $A'OL'$ üçgeni elde ediliyor.

Buna göre A' noktasının koordinatlarını bulunuz.

3.1. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR VE NİTEL ÖZELLİKLERİ

Konuya Başlarken

Matematikteki birçok konu gibi trigonometri de köklü ve evrensel bir içeriğe sahiptir. Bu içeriği keşfetmek; matematik problemlerini çözmenin yanı sıra doğanın ritmini, dalgaların hareketini ve müzikteki armoniyi kavramamıza yardımcı olur. Trigonometri hakkında geçmişten günümüze birçok bilim insanı çeşitli çalışmalar ortaya koymuştur. Bu bilim insanları arasında Bettani (Bettani) ve Ebülvefa Buzcani (Ebulvefa Buzcani) gösterilebilir. Bettani 9. yüzyılda yaşamış ünlü bir astronom, mühendis ve matematikçidir. Trigonometride sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant fonksiyonlarını bulup hesaplamalarda kullanan ilk bilim insanıdır. Bunun yanı sıra trigonometriye katkıları arasında trigonometri tablosunu oldukça hassas bir şekilde hazırlaması yer alır. Özellikle 0° ile 90° arasındaki açıların trigonometrik değerlerini hesaplayarak sonraki çalışmalarında kullanmıştır. Örneğin sıklıkla kullanılan $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ ya da $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ üçgenlerine ait trigonometrik oranların değerleri Tablo 3.1'de gösterilmiştir.

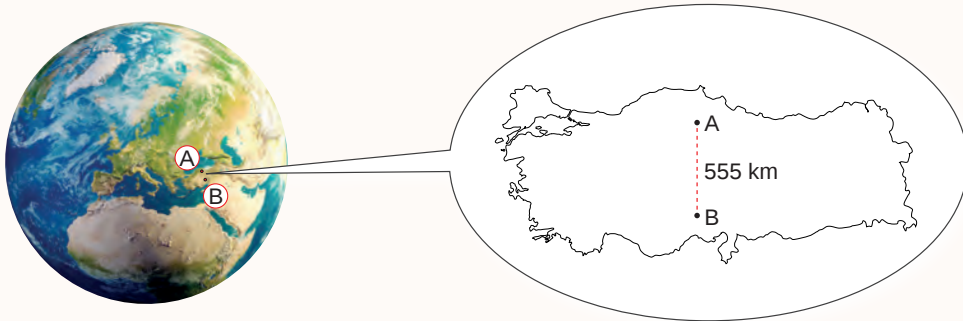
Ebülvefa Buzcani, 10. yüzyılda yaşamış önemli bir matematikçi ve astronomdur. Sinüs ve kosinüs tablolarını doğru bir şekilde hazırlamış, trigonometrik özdeşliklerden bazılarını bularak bilim dünyasına kazandırmıştır. Tanjantı küresel trigonometride ilk defa sistematik olarak kullanmış ve küresel üçgenlerin çözümü için yeni metotlar geliştirmiştir. Sinüs değerlerinin hesaplanabilmesi için yeni bir metot geliştiren Ebülvefa Buzcani, hazırladığı cetvellerde 30 ve 15 dakikalık açının sinüsünün virgülden sonraki sekiz ondalık basamağını son derece hassas bir şekilde hesaplamıştır. Matematik tarihinde ilk defa ortaya koyduğu formüllerden bazıları günümüzde hâlâ aynı şekilde kullanılmaktadır.

Eski çağlarda bilim insanları yıldızların ve gezegenlerin Dünya'dan ne kadar uzakta olduğunu ve gezegenlerin yarıçap uzunluklarını hesaplamaya çalışmışlardır. Örneğin Dünya'nın meridyen boyunca yarıçap uzunluğunun dik üçgende temel trigonometrik oranlar kullanılarak hesaplanmasında aynı boylam üzerinde bulunan Görsel 3.1'deki gibi iki nokta belirlenir. Bu noktalar A ve B şehirleri olarak adlandırılır. Aralarındaki kuş uçuşu mesafe 555 km olarak kabul edilir.

Tablo 3.1: Trigonometrik Oranlar Tablosu

	Sinüs	Kosinüs	Tanjant	Kotanjant	
0°	0	1	0	Tanımsız	90°
5°	0,087	0,996	0,087	11,430	85°
10°	0,173	0,984	0,176	5,671	80°
15°	0,258	0,965	0,267	3,732	75°
20°	0,342	0,939	0,364	2,747	70°
25°	0,422	0,906	0,466	2,144	65°
30°	0,500	0,866	0,577	1,732	60°
35°	0,573	0,819	0,700	1,428	55°
40°	0,642	0,766	0,839	1,191	50°
45°	0,707	0,707	1	1	45°
	Kosinüs	Sinüs	Kotanjant	Tanjant	

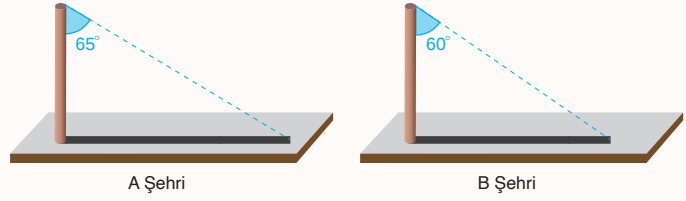
(Tablo okurken aynı renk satır ve sütunun kesişim yerine bakılır.)



Görsel 3.1: Türkiye'de aynı boylam üzerindeki A ve B şehirleri

A ve B şehirlerinde öğle vakti (güneş tam tepedeyken) bir çubuğun gölge boyu ölçülür.

Güneş ışınları ile çubuk arasındaki dar açının tanjant değeri kullanılarak Görsel 3.2'deki gibi A şehrinin gölge açısının ölçüsü 65° , B şehrininki ise 60° olarak belirlenir. Dünya'nın meridyen boyunca çevre uzunluğunun yaklaşık değeri (Ç), merkez açı ölçüsü (θ , gölge açı ölçülerinin farkının mutlak değeri), şehirler arası mesafe (d) olmak üzere $\frac{\theta}{360^\circ} = \frac{d}{\text{Ç}}$ eşitliği Dünya'nın çevresinin meridyen boyunca

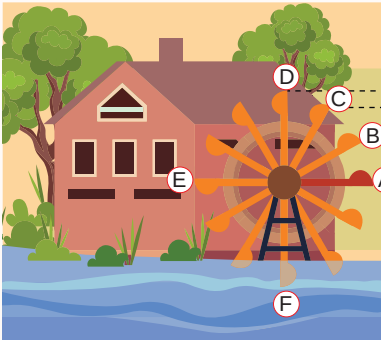


Görsel 3.2: A ve B şehirlerindeki çubuklar ve çubukların gölgesi

yaklaşık değerlerle hesaplanmasında kullanılır. Buradan $\text{Ç} \approx 39\,960$ km olarak bulunur. Dünya'nın yarıçap uzunluğu r olmak üzere $\text{Ç} = 2\pi r$ olduğundan $r = \frac{39\,960}{2\pi} = \frac{19\,980}{\pi} \approx 6359$ km bulunur.

Bu örnek dışında bilimin gelişmesiyle birlikte yapılan hesaplamalar ve kullanılan aletler de gelişmiştir. Örneğin 15 ve 16. yüzyıllarda yaşamış olan ünlü Osmanlı denizcisi ve haritacısı Piri Reis, 1513 yılında dönemin teknolojisinden yararlanarak yaptığı çizimlerle Dünya haritası üzerine ilk çalışmasını tamamlamıştır. Hazırlamış olduğu bu haritadaki doğruluk seviyesinin ve ayrıntıların döneminin çok ilerisinde olması, yaptığı çalışmanın önemini daha da artırmıştır.

Bunun dışında trigonometrik oranların değişimi su değirmenlerinde de görülebilmektedir. Yarıçap uzunluğu 1 metre olan bir su değirmeni, eşit aralıklı 12 kola ayrılmıştır. A konumundaki değirmenin kırmızı kolunun sağ uç noktası, AE doğrusu üzerinde olduğundan AE doğrusuna dikey uzaklığı sıfırdır. Su değirmeninin kırmızı kolunun sağ uç noktası nehirdeki suyun sağa doğru akışı ile pozitif yönde hareket ederek sırasıyla B, C, D, E, F ve A noktalarının bulunduğu konuma gelmektedir. Aşağıda su değirmeni görseli ve değirmenin kollarının yaptığı dönme hareketi sonrasında kırmızı kolun uç noktasının AE doğrusuna uzaklığının oluşturduğu grafik, Şekil 3.1'de verilmiştir.



Şekil 3.1: Su değirmeni görseli ve değirmenin kırmızı kolunun uç noktasındaki hareketin AE doğrusuna uzaklığının oluşturduğu grafik

Buna göre

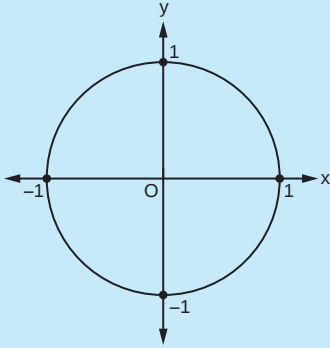
1. Su değirmeninin pozitif yönde hareket etmesiyle değirmenin kırmızı kolunun uç noktasının A, B, C, D, E ve F konumlarının AE doğrusuna dikey uzaklıklarını bularak bu uzaklıklardaki değişimi yorumlayınız.
2. Dikey uzaklıklardaki bu değişimin trigonometrik oranlarla nasıl ifade edileceğini yorumlayınız.

Trigonometrik oranların grafik temsillerle gösterildiği Poster'e yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

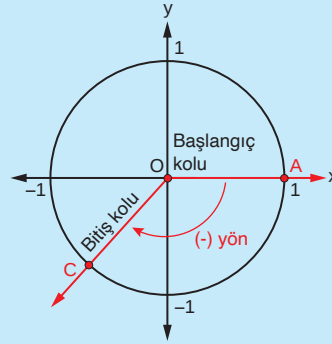
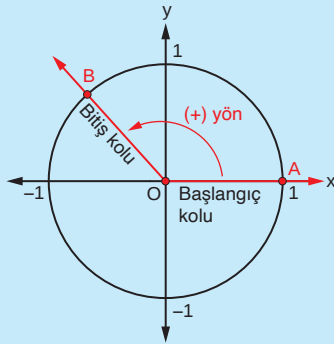


Birim Çember ve Yönlü Açı Kavramı

Trigonometrik fonksiyonların anlaşılabilmesi için birim çember ve yönlü açı kritik kavramlardır. Bu kavramlar, trigonometrik fonksiyonları hem sayısal hem de görsel olarak kavramamıza yardımcı olur.



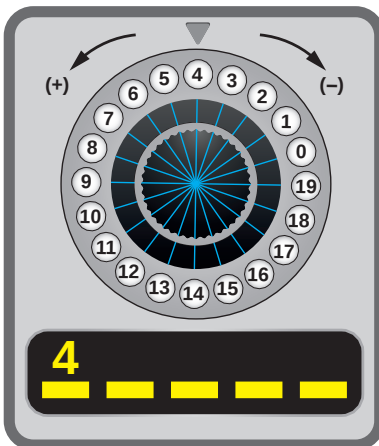
Dik koordinat sisteminde merkezi orijin ve yarıçap uzunluğu 1 birim olan çembere **birim çember** denir.



Başlangıç noktaları aynı olan iki ışından biri başlangıç kolu, diğeri bitiş kolu olarak alındığında oluşan açıya **yönlü açı** denir. Saatin dönme yönünün tersinde olan açılar **pozitif yönlü** ($\widehat{AOB}$) saatin dönme yönünde olan açılar **negatif yönlü** ($\widehat{AOC}$) açılarıdır.

Çembersel hareketlerde yön tarifi yapılırken aşağı, yukarı, sağa, sola gibi ifadeleri kullanmak soru işaretleri oluşturabileceği için pozitif yönlü açı ya da negatif yönlü açı kavramları kullanılır. Örneğin Dünya'nın kendi etrafında ve Güneş etrafında dönme hareketi, atom içerisinde elektronların proton ve nötron etrafında dönme hareketi pozitif yönlü olarak kabul edilir.

1. Örnek



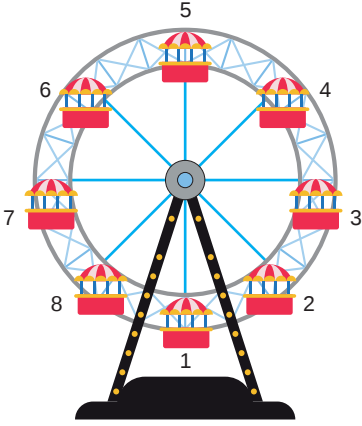
Yandaki görselde şifre girmek için oluşturulmuş bir sistem verilmiştir. Sistem üzerine merkezleri aynı iki çember arasında ve aralıkları eşit olan 20 sayı yerleştirilmiştir. Girilecek şifrenin ilk basamağı 4 olarak verilmiş ve bundan sonraki her sayı için şifre mekanizması sırasıyla -54° , 126° , 18° ve -198° çevrilerek 5 sayıdan oluşan şifre oluşturulmuştur. Mekanizmanın üzerinde bulunan gösterge sabit olup her dönme hareketi sonrasında farklı bir sayıyı göstermektedir.

Verilen bilgilerden yararlanarak şifreyi bulunuz.

Çözüm

Sistem üzerinde toplam 20 bölme bulunmaktadır. $\frac{360^\circ}{20} = 18^\circ$ her sayının bir bölme ilerlemesi için gerekli dönme derecesidir. Negatif yönde 54° için sistem 3 bölme hareket ettirilerek 7 sayısı bulunur. Pozitif yönde 126° için sistem 7 bölme hareket ettirilerek 0 sayısı bulunur. Pozitif yönde 18° için sistem 1 bölme hareket ettirilerek 19 sayısı bulunur. Negatif yönde 198° için sistem 11 bölme hareket ettirilerek 10 sayısı bulunur. Bu şekilde şifre 4-7-0-19-10 olarak tamamlanır.

Sıra Sizde 1

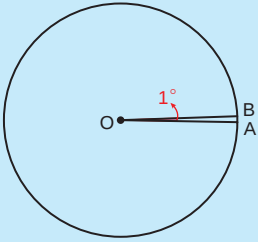


Yanda birbirine eş açılarla 1'den 8'e kadar numaralandırılmış kabinlerden oluşan bir dönme dolap görseli verilmiştir.

Buna göre dönme dolap, -225° döndükten sonra 7 numaralı kabinin olduğu konuma kaç numaralı kabinin geleceğini bulunuz.

Açı Ölçme Birimleri

Açı ölçmek için farklı birimlerden yararlanılır. Açı ölçmek için farklı birimlerden yararlanılsa da derece ve radyan açı ölçü birimlerinin kullanımı daha yaygındır.



Yanda O merkezli çember verilmiştir. A ve B noktaları çember üzerinde yer almaktadır. Tam bir dairenin 360 eş parçaya bölünmesi ile elde edilen her bir yayı gören merkez açının ölçüsüne **1 derece** ($m(\widehat{AOB}) = 1^\circ$) denir.

1. Uygulama



Radyan Kavramı

Öğretmeninizin rehberliğinde sınıfta iki gruba ayrılınız. Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı grup arkadaşlarınızla tamamlayınız. ($\pi \approx 3,14$)

1. Birim çemberin çevre uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

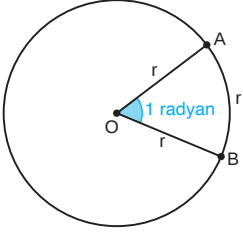




2. Birim çemberde çeyrek ve yarım çemberin yay uzunluğunun kaç birim olduğunu matematik yazılımı kullanarak hesaplayınız. Bulduğunuz yay uzunluklarının çemberin çevre uzunluğuna oranını bulunuz.
3. 2. Soruda hesaplanan oranı, 1. grup olarak yarıçap uzunluğu 2 birim ve 2. grup olarak yarıçap uzunluğu 5 birim olan orijin merkezli çemberler için de matematik yazılımı kullanarak hesaplayınız.
4. Her grup için belirlenen çemberler üzerinde alınan herhangi iki K ve M noktalarını kullanarak $m(\widehat{KOM}) = \alpha$ açı ölçüsünü oluşturunuz. Aşağıdaki tabloda verilen farklı açı ölçüleri için istenen uzunluk ve oranları matematik yazılımı kullanarak hesaplayınız. Elde ettiğiniz veriler ile aşağıdaki tabloyu eksiksiz şekilde doldurunuz.

Açı Ölçüsü (α)	30°		120°		210°		300°	
	1. Grup	2. Grup	1. Grup	2. Grup	1. Grup	2. Grup	1. Grup	2. Grup
Yay Uzunluğu (Birim)								
$\frac{\text{Yay Uzunluğu}}{\text{Çemberin Çevre Uzunluğu}}$								

5. Elde edilen oranları karşılaştırarak çember üzerinde bir yay uzunluğuna bağlı açı ölçüsünün nasıl tanımlanabileceğine dair fikirlerinizi arkadaşlarınızla paylaşınız.



Yanda O merkezli çember verilmiştir. A ve B noktaları çember üzerindedir. Bir çemberde yarıçap uzunluğuna (r) eşit olan yay uzunluğunu gören merkez açının ölçüsüne **1 radyan** ($m(\widehat{AOB}) = 1 \text{ radyan}$) denir.

2. Örnek

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Birim çemberin çevre uzunluğunun kaç birim olduğunu hesaplayarak derece ve radian arasındaki ilişkiyi yorumlayınız.
2. Birim çemberde yarım ve çeyrek çemberin yay uzunluğunu radian olarak hesaplayınız.
3. Herhangi bir çemberde derece (D) ve radian (R) arasındaki bağıntıyı bulunuz.

Çözüm

1. Birim çemberin yarıçap uzunluğu 1 birim olduğundan çemberin çevre uzunluğu $\Ç = 2\pi r \Rightarrow 2\pi \cdot 1 = 2\pi$ birim olur. Bir çember içinde çember yayının tamamını gören merkez açı ölçüsü 360° dir. Bir çember yayının tamamının ölçüsü 2π radian ve 360° olur. Buna göre $360^\circ = 2\pi$ radyana eşit olur.
2. Birim çemberde $360^\circ = 2\pi$ eşitliğinden $\frac{2\pi}{360^\circ} = 1$ radian elde edilir. Burada yarım çemberin yay uzunluğu $180^\circ = 180^\circ \cdot \left(\frac{2\pi}{360^\circ}\right) = \pi$ radian şeklinde hesaplanır. Çeyrek çemberin yay uzunluğu $90^\circ = 90^\circ \cdot \left(\frac{2\pi}{360^\circ}\right) = \frac{\pi}{2}$ radian olarak bulunur.
3. Derecenin $\frac{2\pi}{360^\circ}$ ile çarpımından radian elde edilir. Buna göre $D \cdot \left(\frac{2\pi}{360^\circ}\right) = R$ olur. İfade sadeleştirilerek $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ eşitliği elde edilir.

- Derece ve radyanı birbirine dönüştürmek için $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ eşitliği kullanılır.
- Bu kitapta bir açının ölçüsü π cinsinden yazıldığında ölçünün birimi radian olarak kabul edilecektir.

3. Örnek

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Ölçüsü $\frac{\pi}{3}$ olan açının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.
2. Ölçüsü 135° olan açının ölçüsünün kaç radian olduğunu bulunuz.

Çözüm

1. Ölçüsü π olan açı 180 derece olduğundan π yerine 180° yazılır. Buradan $\frac{\pi}{3} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ elde edilir.
2. $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ eşitliği kullanılarak $\frac{135^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R \cdot 180^\circ = \pi \cdot 135^\circ$ bulunur. Buradan $R = \frac{\pi \cdot 135^\circ}{180^\circ} = \frac{3\pi}{4}$ elde edilir.

Sıra Sizde 2

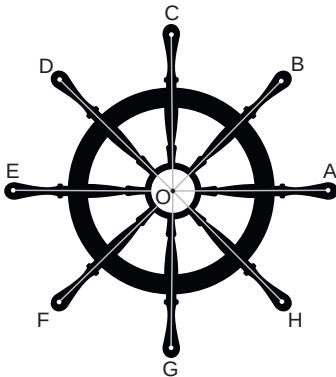
Aşağıdaki açı ölçülerinden derece olanları radyana, radyan olanları dereceye çeviriniz.

1. 195°
2. $\frac{2\pi}{3}$
3. -30°
4. $-\frac{11\pi}{12}$

Konu ile ilgili etkileşimli içeriğe yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

**Esas Ölçü****2. Uygulama****Esas Ölçü Kavramı**

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

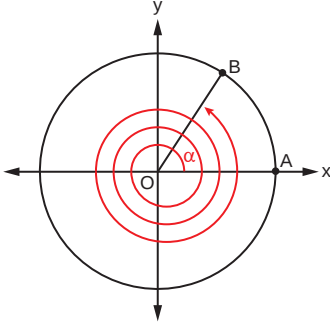


Yandaki görselde verilen bir gemiye ait O merkezli dairesel dümen ve bu dümeni döndürebilmek için sekiz adet dümen kolu verilmiştir. Dümen kollarının uç noktalarını O merkeziyle birleştiren tahta parçalar arasındaki açı ölçüleri eşit olup bu uçların konumları A, B, C, D, E, F, G ve H harfleri ile gösterilmiştir.

1. Dümenin pozitif yönde 135° dönmesi sonucunda A noktasının geldiği yeni konumu bulunuz.
2. Görseldeki dümenin negatif yönde 225° dönmesi sonucunda B noktasının geldiği yeni konumu bulunuz.



3. C noktasının ikinci kez G noktasının konumuna gelebilmesi için görseldeki dümenin pozitif yönde kaç derece dönmesi gerektiğini hesaplayınız.
4. D noktasının, görseldeki dümenin pozitif yönde 405° dönmesi sonucunda oluşan yeni konumunu bulunuz. Bulduğunuz sonuçları kullanarak ölçüsü $[0^\circ, 360^\circ)$ nda olmayan açıların birim çemberde nasıl gösterilebileceğini belirtiniz.



Yandaki O merkezli birim çember üzerinde alınan A ve B noktaları kullanarak oluşturulan $\widehat{AOB}$ açısının ölçüsü α olsun. Buna göre

- $k \in \mathbb{Z}$ ve $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ olmak üzere ölçüsü $\alpha + k \cdot 360^\circ$ olan bir açının esas ölçüsü α derecedir.
- $k \in \mathbb{Z}$ ve $0 \leq \alpha < 2\pi$ olmak üzere ölçüsü $\alpha + k \cdot 2\pi$ olan bir açının esas ölçüsü α radyandır.

4. Örnek

Aşağıdaki açıların esas ölçülerini hesaplayınız.

1. 1570°

2. $\frac{59\pi}{3}$

3. -1240°

4. $-\frac{78\pi}{5}$

Çözüm

1. 1570° 'nin esas ölçüsünü bulmak için açı içerisinde yer alan 360° 'nin katları bulunmalıdır. Bunun için 1570° , 360° ye bölünür.

$$\begin{array}{r} 1570^\circ \\ - 1440^\circ \\ \hline 130^\circ \end{array} \quad \begin{array}{l} 360^\circ \\ 4 \end{array}$$

$1570^\circ = 130^\circ + 4 \cdot 360^\circ$ elde edilir. 1570° 'nin esas ölçüsü 130° olarak bulunur.

2. $\frac{59\pi}{3}$ 'nin esas ölçüsünü hesaplamak için açı içerisinde yer alan 2π ($2\pi = \frac{6\pi}{3}$) nin katları bulunmalıdır. Bu sebeple açının payı paydasının iki katına bölünür.

$$\begin{array}{r} 59 \\ - 54 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 6 \\ 9 \end{array}$$

$$\frac{59\pi}{3} = \frac{(9 \cdot 6 + 5)\pi}{3} = \frac{9 \cdot 6\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = 9 \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{3} \text{ olur.}$$

$\frac{59\pi}{3}$ 'nin esas ölçüsü $\frac{5\pi}{3}$ olarak bulunur.

3. -1240° 'nin esas ölçüsünü bulmak için açı içerisinde yer alan 360° 'nin katları bulunmalıdır. Bunun için 1240° , 360° ye bölünür.

$$\begin{array}{r} 1240^\circ \\ - 1080^\circ \\ \hline 160^\circ \end{array} \quad \begin{array}{l} 360^\circ \\ 3 \end{array}$$

Açının esas ölçüsüne ulaşmak için açığa $3 + 1 = 4$ tam açı ölçüsü eklenir. $-1240^\circ + 4 \cdot 360^\circ = -1240^\circ + 1440^\circ = 200^\circ$ olur.

Buradan -1240° 'nin esas ölçüsü 200° olur.

4. $-\frac{78\pi}{5}$ nin esas ölçüsünü bulmak için açı içerisinde yer alan 2π nin katları bulunmalıdır.

Bunun için açının payı, paydasının iki katına bölünür.

$$\frac{78}{5} \left| \frac{10}{7} \right.$$

$$-\frac{70}{8}$$

$$\frac{-78\pi}{5} = \frac{(-7 \cdot 10 - 8)\pi}{5} = -\left(\frac{7 \cdot 10\pi}{5} + \frac{8\pi}{5}\right) = -7 \cdot 2\pi - \frac{8\pi}{5} \text{ olur.}$$

Açının esas ölçüsüne ulaşmak için açıya $7 + 1 = 8$ tam açı ölçüsü eklenir.

$$-7 \cdot 2\pi - \frac{8\pi}{5} + 8 \cdot 2\pi = -\frac{8\pi}{5} + 2\pi = \frac{-8\pi + 10\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} \text{ olur. Buradan}$$

$$-\frac{78\pi}{5} \text{ nin esas ölçüsü } \frac{2\pi}{5} \text{ olur.}$$

Ek soruların yer aldığı 1. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.
(İçerik: Birim Çember ve Yönlü Açı Kavramı, Açı Ölçme Birimleri ve Esas Ölçü)



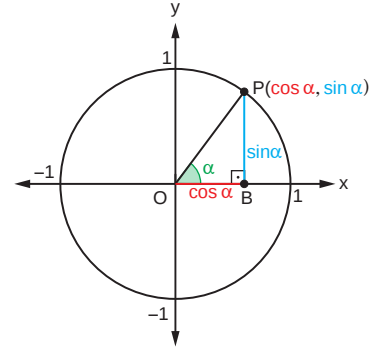
Birim Çemberde Trigonometrik Oranlar

Yanda verilen birim çember üzerindeki P noktasından ve orijinden geçen [OP] nın x eksenine yaptığı pozitif yönlü açının ölçüsü α , P noktasının apsis ve ordinat değerleri sırasıyla |OB| ve |PB| olmak üzere

$$\cos \alpha = \frac{|OB|}{|OP|} = \frac{|OB|}{1} \Rightarrow |OB| = \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{|PB|}{|OP|} = \frac{|PB|}{1} \Rightarrow |PB| = \sin \alpha \text{ olur. Buna göre birim çember}$$

üzerindeki her P noktasının koordinatları $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ olur. POB dik üçgeninde Pisagor teoreminden $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ olur.



5. Örnek

Birim çember yardımıyla aşağıdaki açı ölçülerinin sinüs ve kosinüs değerlerini hesaplayınız.

1. 120°

2. 225°

3. 330°

Çözüm

1. $m(\widehat{AOP}) = 120^\circ$ olacak şekilde bir P noktası belirlenir.

P noktasından x eksenine indirilen dikme ayağı L olsun.

O, P ve L noktaları birleştirilerek OPL dik üçgeni oluşturulur.

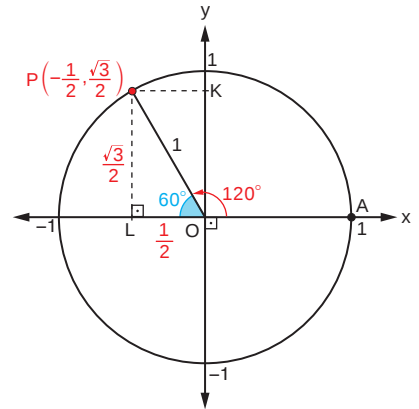
Oluşan OPL dik üçgeninde $m(\widehat{POL}) = 60^\circ$ olur.

Açı ölçüleri 30° , 60° ve 90° olan OPL dik üçgeninde

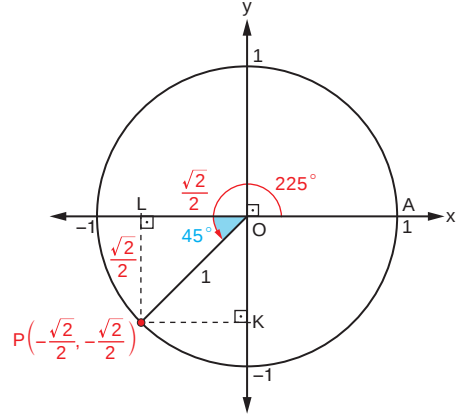
$$|OL| = \frac{1}{2} \text{ birim ve } |PL| = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ birim olur. P noktası}$$

$$2. \text{ bölgede olduğundan } \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ve } \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

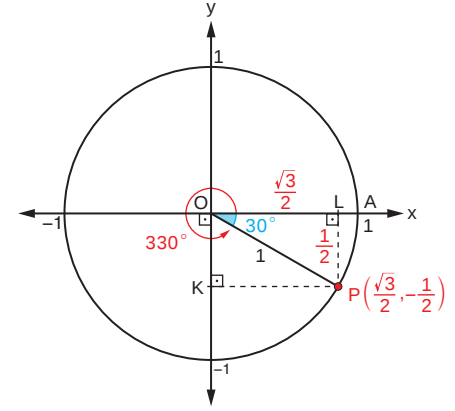
olur.



2. $m(\widehat{AOP}) = 225^\circ$ olacak şekilde bir P noktası belirlenir. P noktasından x eksenine indirilen dikme ayağı L olsun. O, P ve L noktaları birleştirilerek OPL dik üçgeni oluşturulur. $m(\widehat{LOP}) = 45^\circ$ olur. Açı ölçüleri 45° , 45° ve 90° olan OPL dik üçgeninde $|OL| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ birim ve $|PL| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ birim olur. P noktası 3. bölgede olduğundan $\sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ve $\cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ olur.



3. $m(\widehat{AOP}) = 330^\circ$ olacak şekilde bir P noktası belirlenir. P noktasından x eksenine indirilen dikme ayağı L olsun. O, P ve L noktaları birleştirilerek OPL dik üçgeni oluşturulur. $m(\widehat{POL}) = 30^\circ$ olur. Açı ölçüleri 30° , 60° ve 90° olan OPL dik üçgeninde $|OL| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ birim ve $|PL| = \frac{1}{2}$ birim olur. P noktası 4. bölgede olduğundan $\sin 330^\circ = -\frac{1}{2}$ ve $\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olur.



3. Uygulama

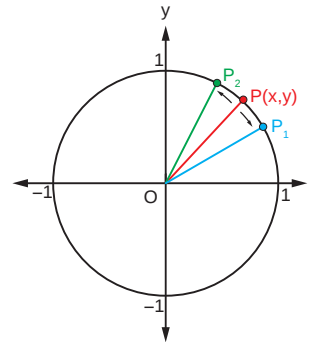


Birim Çemberde Trigonometrik Oranların Değişimi

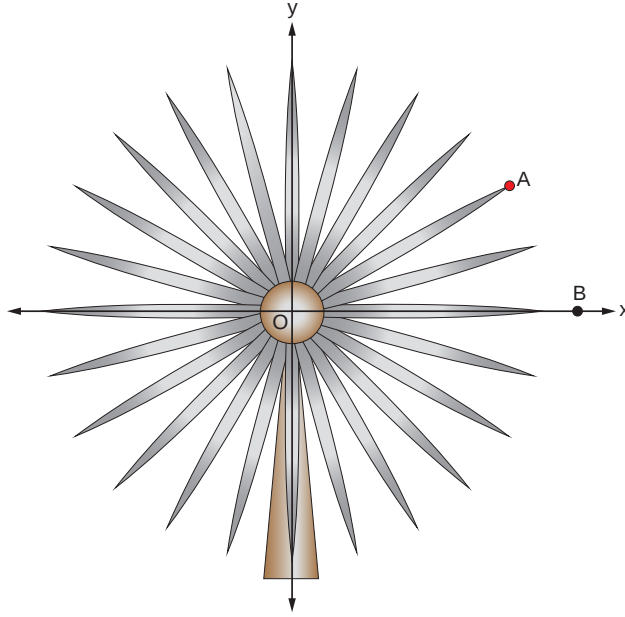
Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

Yanda verilen birim çember üzerindeki P(x, y) noktası; negatif yönde hareket ettiğinde P_1 noktasının üzerine, pozitif yönde hareket ettiğinde ise P_2 noktasının üzerine gelmektedir. P noktasını orijinle birleştiren [OP] nın x eksenini ile yaptığı pozitif yönlü açının ölçüsü α , P_1 noktası için β ve P_2 noktası için θ olsun.

- $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$ ve $\theta = 60^\circ$ açı ölçüleri için P, P_1 ve P_2 noktalarının koordinatlarını trigonometrik oranlarla gösteriniz.
- P_1 ve P_2 noktalarının koordinatlarındaki trigonometrik oranların, P noktasının koordinatlarındaki trigonometrik oranlara göre değişimini yorumlayınız.



6. Örnek



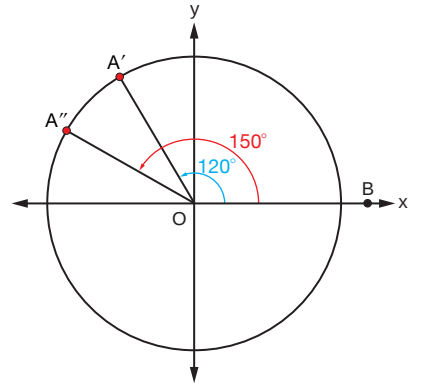
Yukarıda, bir tam dönüşünü 72 saniyede tamamlayan ve eşit uzunluktaki 24 pervaneden oluşan bir rüzgâr türbininin görseli verilmiştir. Rüzgâr türbini; merkezi orijinde, B noktası ise x ekseninde herhangi bir nokta olacak şekilde dik koordinat düzleminde modellenmiştir. Kalınlıkları önemsiz pervaneler, türbin merkezinin etrafına eşit açılarla yerleştirilmiştir. Pervanelerden birinin uç noktası A noktası olup bu noktanın merkeze uzaklığı 1 metredir.

1. Pozitif yönde dönen pervanenin üzerindeki A noktasının, görselde verilen başlangıç konumuna göre 18 ve 24 saniye sonraki koordinatlarını bulunuz.
2. A noktasının bu yeni konumlarından yararlanarak II. bölgede sinüs ve kosinüs değerlerinin nasıl değiştiğini yorumlayınız.

Çözüm

1. Rüzgâr türbininin bir tam dönüşü 72 saniyede tamamlanmaktadır ve ardışık pervaneler arası yer değişikliği $\frac{72}{24} = 3$ saniyede $\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$ lik dönme hareketiyle gerçekleşir.

Rüzgâr türbini üzerindeki A noktasının 18 saniye sonra bulunduğu konum A' noktası olur. A noktasının $\frac{18}{3} = 6$ yer değiştirmesi sonucunda $m(\widehat{BOA'}) = 6 \cdot 15^\circ + 30^\circ = 120^\circ$ olur. 24 saniye sonra bulunduğu konum A'' noktası olur. A noktasının $\frac{24}{3} = 8$ yer değiştirmesi sonucunda $m(\widehat{BOA''}) = 8 \cdot 15^\circ + 30^\circ = 150^\circ$ olur. A' noktasının apsisi $\cos 120^\circ$ ve ordinatı $\sin 120^\circ$ olur. A'' noktasının apsisi $\cos 150^\circ$ ve ordinatı $\sin 150^\circ$ olur.



2. $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ olur. 2. bölgede açı ölçüleri arttıkça kosinüs değerleri azalır.

$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ olur. 2. bölgede açı ölçüleri arttıkça sinüs değerleri azalır.

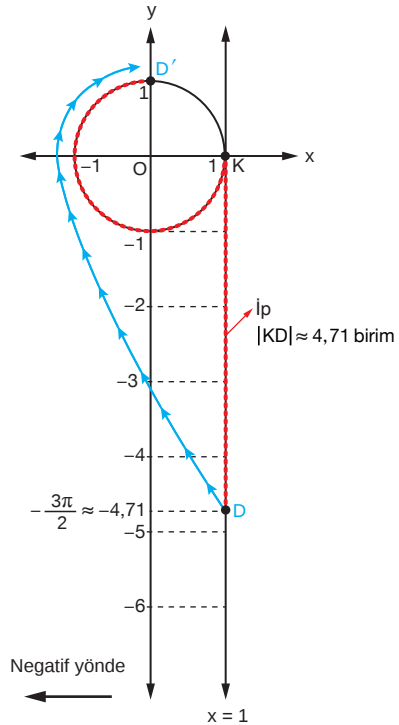
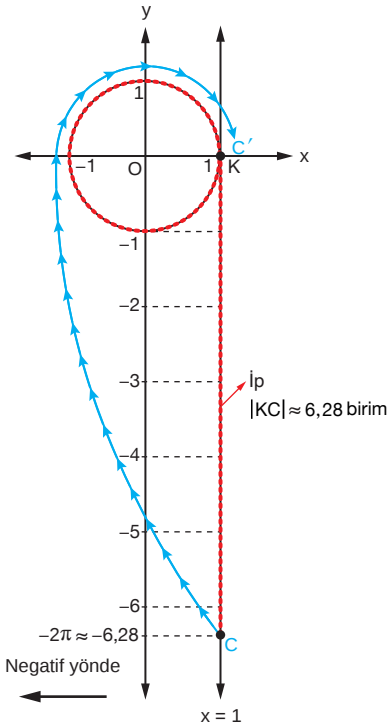
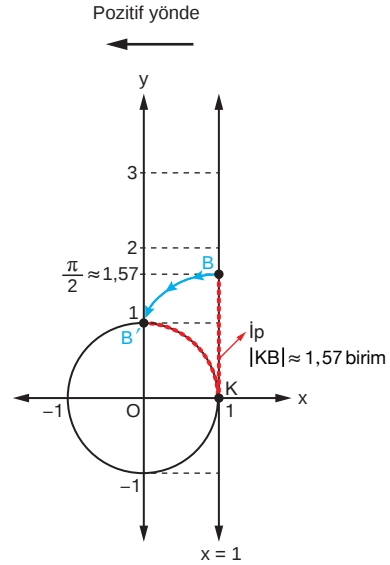
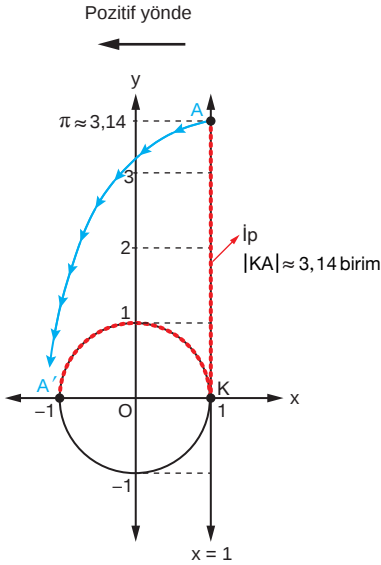
4. Uygulama



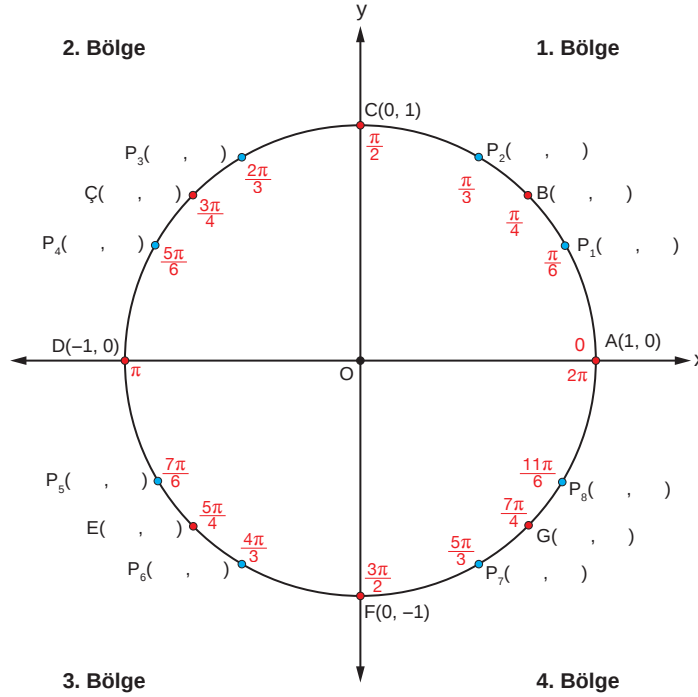
Trigonometrik Fonksiyonların Tanım Kümesini Bulma

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

- Aşağıdaki şekillerde verilen yeterli uzunluğa sahip ip, birim çembere $K(1, 0)$ noktasında teğet olup birim çember üzerine istenilen yönlerde sarılacaktır. İpin başlangıç noktası $K(1, 0)$ dir. $x = 1$ doğrusu üzerindeki A, B, C ve D noktalarından herhangi biri ile K noktası arasındaki uzaklık, ipin uzunluğu olarak kabul edilecektir.



- a) Şekil 1'de gösterilen A noktası, ipin birim çember üzerinde pozitif yönde sarılması sonucunda $A'(-1, 0)$ noktasına; Şekil 2'de gösterilen B noktası, ipin birim çember üzerinde pozitif yönde sarılması sonucunda $B'(0, 1)$ noktasına denk gelmektedir. Buna göre işlem sırasında ipin üzerindeki 2,87 sayısının birim çember üzerinde hangi bölgeye denk geleceğini bulunuz.
- b) Şekil 3'te gösterilen C noktası, ipin birim çember üzerinde negatif yönde sarılması sonucunda $C'(1, 0)$ noktasına; Şekil 4'te gösterilen D noktası, ipin birim çember üzerinde negatif yönde sarılması sonucunda $D'(0, 1)$ noktasına denk gelmektedir. Buna göre işlem sırasında ipin üzerindeki $-5,3$ sayısının birim çember üzerinde hangi bölgeye denk geleceğini bulunuz.
2. Aşağıdaki birim çemberde başlangıç noktası A olmak üzere pozitif yönde ilerlendiğinde A, B, C, Ç, D, E, F, G ve $P_i (i \in [1, 8] \cap \mathbb{Z})$ noktaları oluşmaktadır. A noktası ve şekilde belirtilen diğer noktaların pozitif yönde birleşimi ile oluşan yay uzunluklarının birim cinsinden değeri, çember üzerinde gösterilmiştir. Örneğin AP_1 yay uzunluğu $\frac{\pi}{6}$ birimdir.



- a) Bu noktaların koordinatlarını, trigonometrik fonksiyon özelliklerine sahip bir hesap makinesi kullanarak bulunuz ve bulduğunuz sonuçları ilgili boşluklara yazınız.

- b) Birim çember üzerinde verilen noktaların koordinatlarını ifade eden sinüs ve kosinüs değerlerindeki değişimi inceleyerek Tablo 1 ve Tablo 2'yi örnekteki gibi doldurunuz.

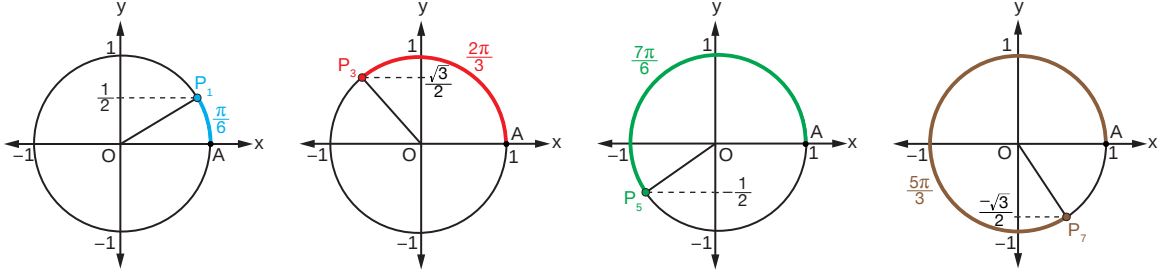
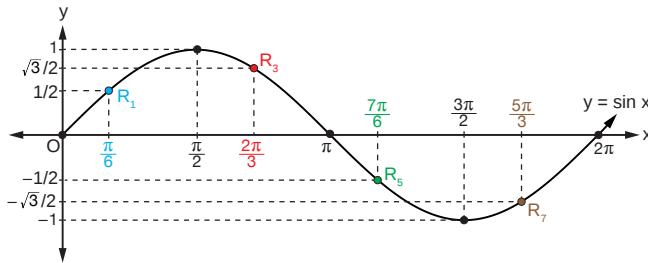
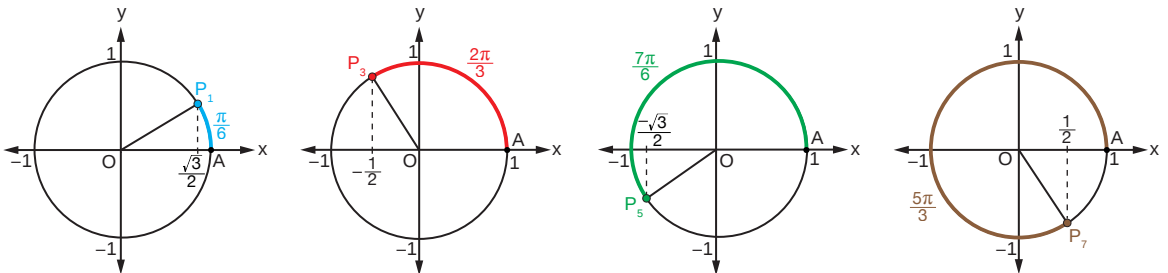
Tablo 1

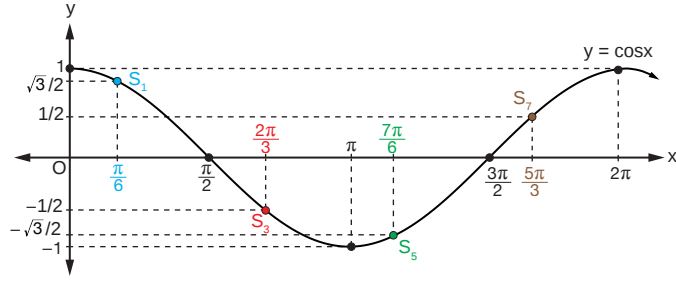
	1. Bölge ($0 < x < \frac{\pi}{2}$)		2. Bölge ($\frac{\pi}{2} < x < \pi$)
$x < \frac{\pi}{4}$	x sayısı büyüdükçe sinüs değerleri artar, kosinüs değerleri azalır.	$x < \frac{3\pi}{4}$	
$x = \frac{\pi}{4}$	Sinüs değerleri ile kosinüs değerleri eşittir.	$x = \frac{3\pi}{4}$	
$x > \frac{\pi}{4}$	x sayısı büyüdükçe sinüs değerleri artar, kosinüs değerleri azalır.	$x > \frac{3\pi}{4}$	

Tablo 2

	3. Bölge ($\pi < x < \frac{3\pi}{2}$)		4. Bölge ($\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$)
$x < \frac{5\pi}{4}$		$x < \frac{7\pi}{4}$	
$x = \frac{5\pi}{4}$		$x = \frac{7\pi}{4}$	
$x > \frac{5\pi}{4}$		$x > \frac{7\pi}{4}$	

3. 2. soruda verilen birim çember üzerindeki bazı noktalara karşılık gelen pozitif yönlü yay uzunluklarının sinüs ve kosinüs değerlerinin bulunmasına ilişkin grafikler aşağıda verilmiştir.

Birim çember üzerindeki yayın uç noktaları olan P_1 , P_3 , P_5 ve P_7 noktalarının ordinatlarıBirim çember üzerindeki farklı uzunluklardaki pozitif yönlü yaylara karşılık gelen noktaların (P_1 , P_3 , P_5 ve P_7) yay uzunluklarına bağlı ordinatlarını gösteren eğriBirim çember üzerindeki yayın uç noktaları olan P_1 , P_3 , P_5 ve P_7 noktalarının apsisi



Birim çember üzerindeki farklı uzunluklardaki pozitif yönlü yaylara karşılık gelen noktaların (P_1, P_3, P_5 ve P_7) yay uzunluklarına bağlı apsiserini gösteren eğri

- a) Yukarıdaki grafik temsillerini inceleyerek eğri üzerindeki noktalar ile bu noktaların x ve y eksenlerindeki karşılıklarının, birim çember üzerindeki pozitif yönlü yay uzunluklarıyla ilişkisini bulunuz. Ardından bu ilişki hakkındaki düşüncelerinizi yazınız.

- b) Birim çemberdeki yay uzunluklarının negatif yönde oluşturulması durumunda grafiklerde oluşabilecek değişimlere dair fikirlerinizi yazınız.

4. a) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ve $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ trigonometrik ifadelerinden hareketle 2. soruda verilen A, B, C, Ç, D, E, F, G ve P noktalarına karşılık gelen yay uzunluklarının tanjant ve kotanjant değerlerini bulunuz.

- b) Birim çember üzerinde verilen noktaya karşılık gelen açının ölçülerinin tanjant ve kotanjant değerlerindeki değişimini inceleyerek Tablo 3 ve Tablo 4'ü örnekteki gibi doldurunuz.

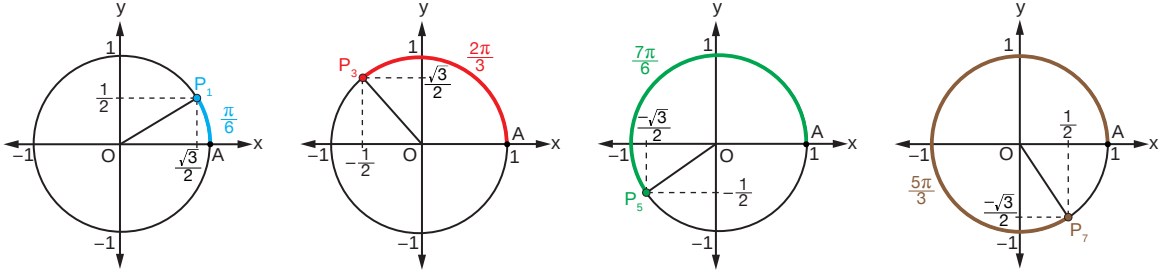
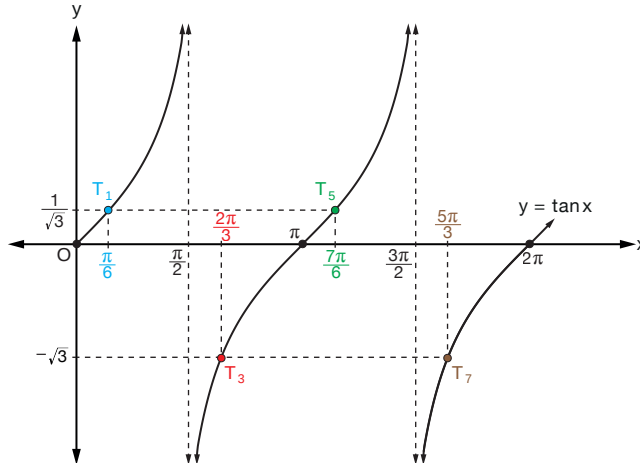
Tablo 3

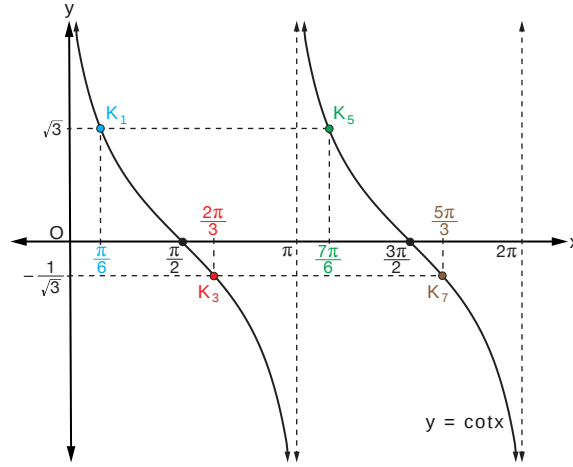
	1. Bölge ($0 < x < \frac{\pi}{2}$)		2. Bölge ($\frac{\pi}{2} < x < \pi$)
$x < \frac{\pi}{4}$	x sayısı arttıkça tanjant değerleri artar, kotanjant değerleri azalır.	$x < \frac{3\pi}{4}$	
$x = \frac{\pi}{4}$	Tanjant değerleri ile kotanjant değerleri eşittir.	$x = \frac{3\pi}{4}$	
$x > \frac{\pi}{4}$	x sayısı arttıkça tanjant değerleri artar, kotanjant değerleri azalır.	$x > \frac{3\pi}{4}$	

Tablo 4

	3. Bölge ($\pi < x < \frac{3\pi}{2}$)		4. Bölge ($\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$)
$x < \frac{5\pi}{4}$		$x < \frac{7\pi}{4}$	
$x = \frac{5\pi}{4}$		$x = \frac{7\pi}{4}$	
$x > \frac{5\pi}{4}$		$x > \frac{7\pi}{4}$	

5. 2. soruda verilen birim çember üzerindeki bazı noktalara karşılık gelen pozitif yönlü yay uzunluklarının tanjant ve kotanjant değerlerinin bulunmasına ilişkin grafikler aşağıda verilmiştir.

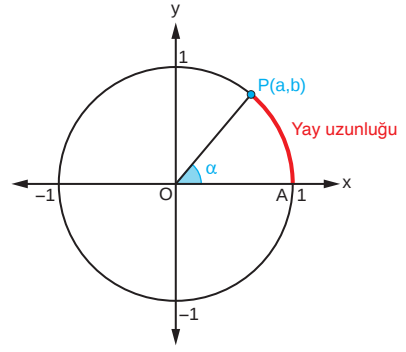
Birim çember üzerindeki P_1, P_3, P_5 ve P_7 noktalarının apsisi ve ordinatlarıBirim çember üzerindeki farklı uzunluklardaki pozitif yönlü yaylara karşılık gelen noktaların (P_1, P_3, P_5 ve P_7) yay uzunluklarına bağlı ordinatlarının apsilerine oranını gösteren eğri



Birim çember üzerindeki farklı uzunluklardaki pozitif yönlü yaylara karşılık gelen noktaların (P_1, P_3, P_5 ve P_7) yay uzunluklarına bağlı apsilerinin ordinatlarına oranını gösteren eğri

- a) Yukarıdaki grafik temsillerini inceleyerek oranların gösterildiği eğri üzerindeki noktaların x ve y eksenlerine karşılık gelen değerler ile bu değerleri veren birim çember üzerindeki noktaların oluşturduğu pozitif yönlü yay uzunluklarının arasındaki ilişkiyi bulunuz ve bu ilişkiye dair fikirlerinizi yazınız.
- b) Birim çemberde yayın negatif yönde oluşturulması durumunda grafiklerde gözlenebilecek değişimlere dair fikirlerinizi yazınız.
6. Gerçek sayılar ile açı değerleri arasındaki ilişkiyi göz önünde bulundurarak x açısına bağlı sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının nasıl tanımlanabileceğine dair fikirleriniz üzerine arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışınız.

Birim çember üzerindeki her P noktası için $P(a, b) = P(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $a \neq 0$ olmak üzere $\frac{b}{a} = \tan \alpha$ ve $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b} = \cot \alpha$ eşitlikleri sağlanır. O noktası sabit kalmak şartıyla P noktası çember üzerinde hareket ettirildikçe değişen her bir P noktasına birim çemberde bir AP yayı karşılık gelir ve $m(\widehat{AOP}) = \alpha$ açı ölçüsü oluşur. P noktasının hareketiyle AP yayı da değişir. Bu yay uzunluğu çember üzerinde her zaman bir gerçek sayı ile ifade edilir. Dolayısıyla birim çemberde her açı ölçüsüne karşılık gelen bir gerçek sayı vardır.



$$f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin x,$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], g(x) = \cos x,$$

$$h: \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \tan x,$$

$$r: \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, r(x) = \cot x \text{ şeklinde tanımlı } f, g, h \text{ ve } r \text{ fonksiyonlarına } \mathbf{trigonometrik referans fonksiyonlar} \text{ denir.}$$

5. Uygulama



Uygun Tanım ve Değer Kümesine Sahip $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \tan x$ ve $r(x) = \cot x$ Trigonometrik Referans Fonksiyonların Nitel Özellikleri

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1. a) Tablo 1 ve Tablo 2'de verilen açı ölçülerini kullanarak f , g , h ve r trigonometrik referans fonksiyonların değerlerini birim çemberden yararlanarak hesaplayınız ve tabloyu örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 1

Fonksiyonlar	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$f(x) = \sin x$	0						
$g(x) = \cos x$	1						
$h(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\frac{0}{1} = 0$						
$r(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\frac{1}{0}$ (tanımsız)						

Tablo 2

Fonksiyonlar	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f(x) = \sin x$							
$g(x) = \cos x$							
$h(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$							
$r(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$							





- b) Tablo 1 ve Tablo 2'deki bilgilerden yararlanarak f , g , h ve r fonksiyonlarının $[0, 2\pi]$ ndaki grafiklerini çiziniz.

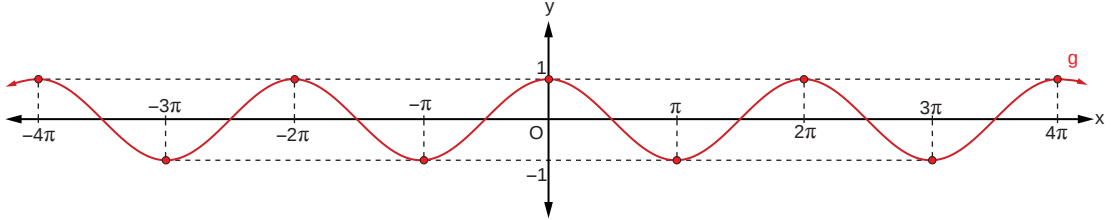
2. a) Aşağıdaki adımları matematik yazılımında uygulayarak 1. soruda verilen f , g , h ve r fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.
1. adım: Bilgisayar veya etkileşimli tahtada matematik yazılımını açarak **Giriş** bölümüne $f(x) = \sin x$ yazınız ve **Enter** tuşuna basınız.
2. adım: Aynı işlemi g , h ve r fonksiyonlarının grafiklerini elde etmek için uygulayınız.
- b) Elde edilen grafikleri 1. soruda çizdiğiniz grafiklerle karşılaştırarak varsa farklılıkları yazınız.
3. f , g , h ve r trigonometrik referans fonksiyonların nitel özellikleri ile ilgili verilen aşağıdaki soruları 1 ve 2. soruda elde edilen grafikleri inceleyerek cevaplayınız. Düşüncelerinizi temellendirerek sorulara verdiğiniz cevapları sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız ve arkadaşlarınızı etkin bir şekilde dinleyerek verilen cevaplara yönelik yorumlar yapınız.
- a) Fonksiyonların grafikleri incelendiğinde aynı y değerini veren farklı x açı ölçüleri var mıdır? Varsa bu y değerlerini tekrar etme durumlarına göre yorumlayınız.
- b) Fonksiyonların değer kümesindeki her gerçektek sayıya karşılık gelen bir x değeri var mıdır? Açıklayınız.
- c) Fonksiyonların sıfırlarını bularak pozitif ve negatif oldukları aralıkları belirtiniz.
- ç) Fonksiyonları tanımlandıkları aralıklardaki artanlık ve azalanlık durumlarını inceleyerek yorumlayınız.
- d) Fonksiyon grafiklerinin maksimum ve minimum noktalarını grafik üzerinden yorumlayınız.
- e) Fonksiyonların grafiklerini inceleyerek tek ya da çift fonksiyon olma durumlarını gerekçeleriyle açıklayınız.





Gerçek sayıların alt aralıklarında tanımlı ve değerli f fonksiyonu için $f(x) = f(x + T)$ eşitliğini sağlayan $T \in \mathbb{R}^+$ varsa f fonksiyonuna **periyodik fonksiyon**, en küçük T sayısına bu fonksiyonun **esas periyodu** denir. Esas periyot (T) aynı değerin tekrar ettiği en küçük pozitif gerçektir.

4. a) Aşağıdaki uygun tanım ve değer kümesine sahip $g(x) = \cos x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonun grafiğini inceleyerek fonksiyonun periyodunu bulunuz.



- b) Matematik yazılımlarından yararlanarak a maddesinde yapılan incelemeyi sinüs, tanjant ve kotanjant trigonometrik referans fonksiyonları için de yapınız ve bu fonksiyonların periyotlarını bulunuz.

- c) Aşağıdaki tabloları doldurarak $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonların periyotlarını bulunuz.

Tablo 3

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}$	Periyodu
$\sin x$												

Tablo 4

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π	Periyodu
$\cos x$												

Tablo 5

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	Periyodu
$\tan x$												

Tablo 6

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	Periyodu
$\cot x$												



5. Çizdiğiniz grafiklerden ve sınıfça yaptığınız tartışmalardan elde ettiğiniz sonuçları göz önünde bulundurarak $f: [0, 2\pi) \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$, $g: [0, 2\pi) \rightarrow [-1, 1]$, $g(x) = \cos x$, $h: \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \tan x$ ve $r: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $r(x) = \cot x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonların nitel özelliklerini bulunuz ve Tablo 7'yi doldurunuz.

Tablo 7

Nitel Özellik	$f(x) = \sin x$	$g(x) = \cos x$	$h(x) = \tan x$	$r(x) = \cot x$
Tanım Kümesi				
Görüntü Kümesi				
İşareti	(+)			
	(-)			
Artan Olduğu Aralık				
Azalan Olduğu Aralık				
Maksimum Noktası ve Değeri				
Minimum Noktası ve Değeri				
Bire Bir Olma Durumu				
Örten Olma Durumu				
Periyodu				
Tekliği Çiftliği				
Sıfırları				

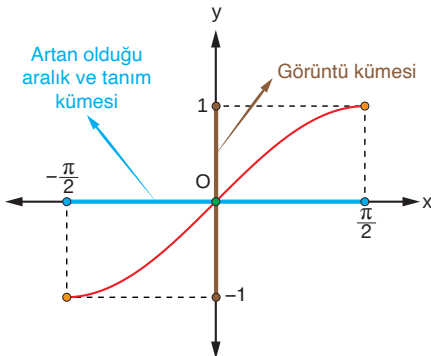
7. Örnek

$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonu veriliyor.

Buna göre f fonksiyonunun grafiğini çizerek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Tanım ve görüntü kümesini bulunuz.
2. İşaretini ve sıfırını bulunuz.
3. Artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.
4. Maksimum-minimum değerlerini ve bu değerleri aldığı noktaları bulunuz.
5. Bire birliğini ve örtenliğini inceleyiniz.
6. Tek ya da çift olma durumunu inceleyiniz.

Çözüm



$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir.

Buna göre fonksiyonun

1. Tanım kümesi $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, görüntü kümesi $[-1, 1]$ dir.
2. $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ için $f(x) < 0$ olduğundan fonksiyonun bu aralıkta işareti negatiftir. $x = 0$ için $f(x) = 0$ olduğundan fonksiyonun sıfırı 0'dır. $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ için $f(x) > 0$ olduğundan fonksiyonun bu aralıkta işareti pozitiftir.



3. $\forall a, b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ için $a < b$ iken $f(a) < f(b)$ olduğundan $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ nda artandır.
4. Maksimum değeri 1, maksimum değerini aldığı nokta $x = \frac{\pi}{2}$ dir.
Minimum değeri -1 , minimum değerini aldığı nokta $x = -\frac{\pi}{2}$ dir.
5. Tanım kümesindeki farklı x değerlerine karşılık gelen $y = f(x)$ değerleri farklı olduğundan f fonksiyonu bire birdir. Değer kümesindeki her $y = f(x)$ değeri, tanım kümesindeki en az bir x değerine karşılık geldiğinden f fonksiyonu örtendir.
6. f fonksiyonu, tanım aralığında tek fonksiyondur.

Sıra Sizde 3

$f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \tan x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonu veriliyor.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Tanım kümesini bulunuz.
2. Görüntü kümesini bulunuz.
3. İşaretini ve sıfırlarını inceleyiniz.
4. Artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.
5. Maksimum-minimum değerlerini ve bu değerleri aldığı noktaları bulunuz.
6. Bire birliğini inceleyiniz.
7. Örtенliğini inceleyiniz.
8. Tekliğini ve çiftliğini inceleyiniz.
9. Periyodunu bulunuz.

Ek soruların yer aldığı 2. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.
(İçerik: Trigonometrik Referans Fonksiyonları ve Nitel Özellikleri)



Performans Görevi

Adı: Trigonometrik Referans Fonksiyonların Nitel Özellikleri

Beklenen Performans: Trigonometrik referans fonksiyonların nitel özelliklerinin incelenmesiyle ilgili bilgileri araştırmak ve bu bilgileri dijital araçlar kullanarak sunma.

Görev: Bu görevde trigonometrik referans fonksiyonların nitel özelliklerini (Tanım kümesi, görüntü kümesi, bire birlik, örtenlik, artanlık-azalanlık vb. gibi) fonksiyonların grafik çizimleri yardımıyla inceleyerek sınıf arkadaşlarınıza sunmanız beklenmektedir.

Yönerge:

Göreve başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Yapılacak işleri ve çalışma takviminizi içeren bir çalışma planı oluşturunuz.
- Çalışmanızı oluştururken takip edeceğiniz adımları belirleyiniz.
- Çalışmanızı öğretmeninizin belirlediği sürede tamamlayınız.

Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Trigonometrik referans fonksiyonların nitel özelliklerini belirleyiniz.
- Belirlediğiniz nitel özellikleri her bir trigonometrik referans fonksiyonu için ayrı ayrı ele alarak inceleyiniz.
- Çalışmanız için bir sunum hazırlayınız.

Görev bitiminde aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Oluşturduğunuz sunuyu sınıfınızda arkadaşlarınızla paylaşınız.
- Tamamladığınız çalışmayı öğretmeninize teslim ediniz.

Değerlendirme: Performans göreviniz öğretmeniniz tarafından aşağıdaki karekodda verilen Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı ile değerlendirilecektir.

Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

**Kontrol Noktası**

Gerçek sayılarda tanımlı ve değerli trigonometrik referans fonksiyonların nitel özelliklerinin tablosu aşağıda verilmiştir.

Nitel Özellikler	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
Tanım Kümesi	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
Görüntü Kümesi	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Artanlık/Azalanlık	Artan/Azalan	Artan/Azalan	Daima artan	Daima azalan
Maksimum Nokta ve Minimum Nokta	Var	Var	Yok	Yok
Bire Bir Olma Durumu	Hayır	Hayır	Hayır	Hayır
Örten Olma Durumu	Hayır	Hayır	Evet	Evet
Periyodu	2π	2π	π	π
Tek-Çift Fonksiyon	Tek	Çift	Tek	Tek
Sıfırları	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{ \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{ \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Trigonometrik Referans Fonksiyonlarından Türetilen Fonksiyonlar

Trigonometrik referans fonksiyonlardaki dönüşümler incelenerek; fonksiyonların grafiklerinin gerilmesi veya sıkıştırılması, periyot ve ötelenme özelliklerindeki değişiklikler analiz edilebilir.

6. Uygulama



$f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ Şeklinde Tanımlı Trigonometrik Referans Fonksiyondan Türetilen $g(x) = k \cdot f(mx + r) + s$ ($k, m, r, s \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, $m \neq 0$) Trigonometrik Fonksiyonun Nitel Özellikleri

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

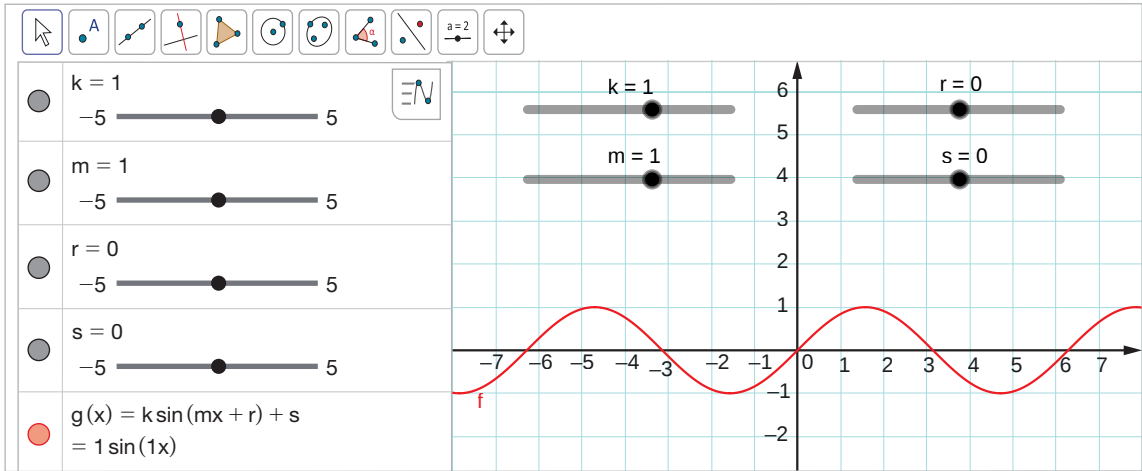
1. Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıda istenenleri gerçekleştiriniz.

1. adım: Araçlar menüsünden **Sürgü** aracını seçiniz. Sayısal değerler alan k , m , r ve s sürgülerini tanımlayınız ve aralığı -5 ile 5 olarak seçiniz.

2. adım: Cebir menüsünde yer alan **Giriş** bölümüne $g(x) = k \cdot \sin(mx + r) + s$ yazınız.

3. adım: Sürgüleri $k = 1$, $m = 1$, $r = 0$, $s = 0$ seçerek $f(x) = \sin x$ trigonometrik referans fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Bu adımların matematik yazılımında uygulandığı benzer bir örneğin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



a) $m = 1$, $r = 0$, $s = 0$ ve $k \neq 0$ iken k sürgüsüne Tablo 1'deki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 1

Fonksiyon İsmi	k Sürgüsünün Değeri	Oluşan Sinüs Fonksiyonunun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot \sin(mx + r) + s$	Sinüs Trigonometrik Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Sinüs Trigonometrik Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 2$	$h(x) = 2 \cdot \sin x$	Her bir bağımsız değişkenine karşılık gelen değeri 2 ile çarpma	2 kat dikey germe
n	$k = -1$			
t	$k = 3$			
p	$k = -4$			



- b) $m = 1, r = 0, s \neq 0$ ve $k \neq 0$ iken k ve s sürgüsüne Tablo 2'deki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 2

Fonksiyon İsmi	k ve s Sürgüsünün Değeri	Oluşan Sinüs Fonksiyonunun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot \sin(mx + r) + s$	Sinüs Trigonometrik Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Sinüs Trigonometrik Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 1$ ve $s = 4$	$h(x) = \sin x + 4$	Her bir bağımsız değişkene karşılık gelen fonksiyon değerine 4 ekleme	y eksenini boyunca pozitif yönde 4 birim öteleme
n	$k = -1$ ve $s = 2$			
t	$k = 3$ ve $s = -1$			
p	$k = -4$ ve $s = -\frac{1}{2}$			

- c) $m \neq 0$ ve $r = 0$ iken k, s ve m sürgüsüne Tablo 3'teki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 3

Fonksiyon İsmi	k, s ve m Sürgüsünün Değeri	Oluşan Sinüs Fonksiyonunun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot \sin(mx + r) + s$	Sinüs Trigonometrik Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Sinüs Trigonometrik Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 1, s = 0$ ve $m = 2$	$h(x) = \sin 2x$	Her bir bağımsız değişkeni 2 ile çarpma	x eksenini boyunca 2 kat daralma
n	$k = -2, s = 2$ ve $m = 3$			
t	$k = 1, s = 0$ ve $m = -\frac{1}{2}$			
p	$k = -4, s = -\frac{1}{2}$ ve $m = \frac{1}{3}$			



- ç) $m \neq 0$ ve $k \neq 0$ iken k , s , m ve r sürgüsüne Tablo 4'teki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 4

Fonksiyon ismi	k , s , m ve r Sürgüsünün Değeri	Oluşan Sinüs Fonksiyonunun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot \sin(mx + r) + s$	Sinüs Trigonometrik Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Sinüs Trigonometrik Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 1$, $s = 2$, $m = 1$ ve $r = -3$	$h(x) = \sin(x - 3) + 2$	Her bir bağımsız değişkenin 3 ek- siğinin fonksiyon değerine 2 ekleme	x eksenini boyunca pozitif yönde 3 birim, y eksenini bo- yunca pozitif yönde 2 birim öteleme
n	$k = 2$, $s = 0$, $m = 1$ ve $r = 3$			
t	$k = 3$, $s = -2$, $m = 2$ ve $r = 1$			
p	$k = -1$, $s = 3$, $m = -2$ ve $r = 0$			

2. Uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlı f trigonometrik referans fonksiyonuna uygulanan dönüşümler sonucunda elde edilen sinüs fonksiyonlarının cebirsel ve grafik temsili olarak Tablo 5'te boş bırakılan kısmı örnekteki gibi doldurunuz. Fonksiyonların grafik temsillerini matematik yazılımlarını kullanarak oluşturunuz.

Tablo 5

f Fonksiyonunun Grafiğine Uygulanan Dönüşüm	Cebirsel Temsil	Grafik Temsili
y eksenini boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme	$g(x) = \sin x + 1$	
4 kat sıkıştırma ve x eksenini boyunca negatif yönde 3 birim öteleme		



3. Gerçek sayılarda tanımlı ve değerli $f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlı f trigonometrik referans fonksiyonun nitel özelliklerinden hareketle Tablo 6 ve Tablo 7'de cebirsel temsili verilen sinüs fonksiyonlarının nitel özellikleri ile ilgili varsayımlarınızı örnekteki gibi ifade ediniz.

Tablo 6

$h: \mathbb{R} \rightarrow [-3, 1], h(x) = 2 \cdot \sin(x + 3) - 1$	
Nitel Özellikler	Varsayımlar
Tanım Kümesi	
Görüntü Kümesi	Görüntü kümesi $[-3, 1]$ dir.
Bire birliği	
Örtenliği	
Periyodu	
Sıfırları	
İşareti	
Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	
Artanlığı-Azalanlığı	
Teklik-Çiftlik	

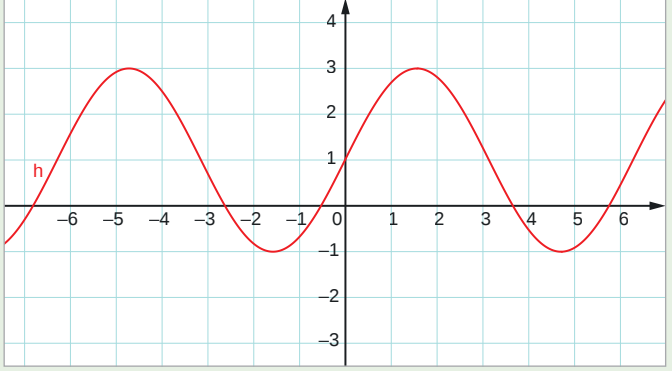
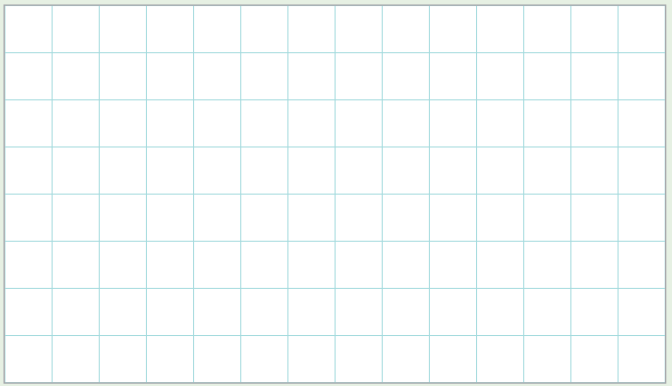
Tablo 7

$g(x) = k \cdot \sin(mx + r) + s (k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0)$	
Nitel Özellikler	Varsayımlar
Tanım Kümesi	Tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.
Görüntü Kümesi	
Bire birliği	
Örtenliği	
Periyodu	
Sıfırları	
İşareti	
Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	
Artanlığı-Azalanlığı	
Teklik-Çiftlik	



4. Aşağıda $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonundan türetilmiş bazı fonksiyonlar verilmiştir.
- a) Verilen fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımlarını kullanarak çiziniz ve istenen nitel özellikleri bularak Tablo 8'i örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 8

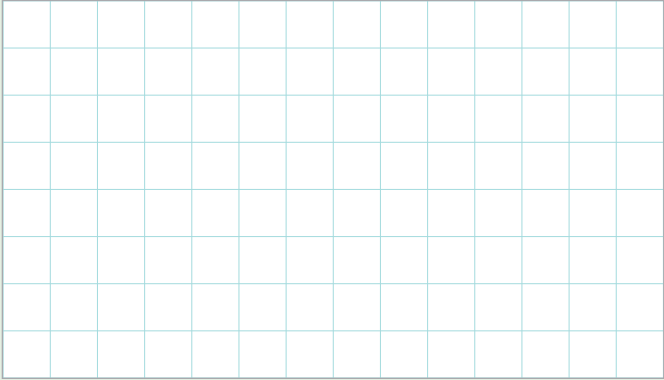
Fonksiyonun Cebirsel Temsili	İnceleme Türü	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi
$h(x) = 2 \cdot \sin x + 1$	Grafik		
	Cebirsel	Grafik incelendiğinde h fonksiyonunun tüm gerçek sayılar için tanımlı olduğu görülmektedir. Tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.	Grafik incelendiğinde h fonksiyonunun görüntü aralığının $[-1, 3]$ olduğu görülmektedir.
$n(x) = \sin(x + 2) - 3$	Grafik		
	Cebirsel	f trigonometrik referans fonksiyonu $\mathbb{R}$ de tanımlıdır. $h(x) = 2 \cdot f(x) + 1 = 2 \cdot \sin x + 1$ olduğu için h fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$ olur.	f trigonometrik referans fonksiyonunun görüntü kümesi $[-1, 1]$ dır. Buradan $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \cdot \sin x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 2 \cdot \sin x + 1 \leq 3$ olduğu için görüntü kümesi $[-1, 3]$ olur.

- b) Verilen fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımlarını kullanarak çiziniz ve istenen nitel özellikleri bularak Tablo 9'u örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 9

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	İnceleme Türü	Periyot	Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar
$t(x) = \sin x + 2$	Grafik			
		Grafik incelendiğinde t fonksiyonunun periyodik olduğu görülür. f trigonometrik referans fonksiyonunun periyodu 2π dir. t fonksiyonunun grafiği, f fonksiyonunun grafiğinin y ekseninin pozitif yönünde 2 birim ötelenmiş şeklidir. Bu sebeple t fonksiyonunun periyodu 2π dir.	Grafik incelendiğinde t fonksiyonunun maksimum değeri 3'tür. Maksimum değeri veren noktaları ise $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) olur. t fonksiyonunun minimum değeri 1'dir. Minimum değeri veren noktaları ise $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) olur.	Grafik incelendiğinde $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ nda t fonksiyonunun değerlerinin arttığı, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ nda t fonksiyonunun değerlerinin azaldığı ve $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ nda t fonksiyonunun değerlerinin arttığı görülür. t fonksiyonuna ait grafik bu aralıkları 2π lik periyotlarla tekrarlar.
	Cebirsel	$g(x) = k \cdot \sin(mx + r) + s$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği, m gerçekte sayısının mutlak değerine bağlı olarak yatay sıkıştırmaya veya germeye sebep olur. Bu sebeple periyot $T = \frac{2\pi}{ m }$ şeklinde hesaplanır. t fonksiyonunun periyodu $m = 1$ için $T = 2\pi$ olur.	f trigonometrik referans fonksiyonun maksimum noktaları ve değeri $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) ve $y = 1$, minimum noktaları ve değeri ise $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) ve $y = -1$'dir. $t(x) = f(x) + 2 = \sin x + 2$ olduğu için t fonksiyonunun maksimum noktaları ve değeri $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) ve $y = 3$, minimum noktaları ve değeri $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) ve $y = 1$ olur.	$t(x) = f(x) + 2 = \sin x + 2$ olduğu için t fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıklar, y ekseninde 2 birim ötelemeden dolayı f fonksiyonunki ile aynı kalmaktadır. Buna göre t fonksiyonu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ve $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ nda artan, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ nda azalandır.

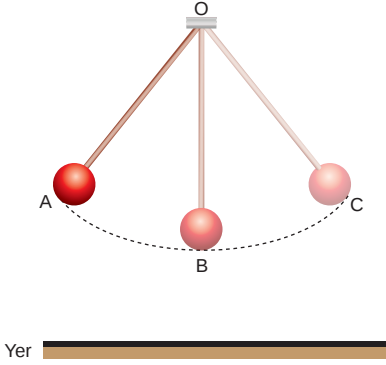


Fonksiyonun Cebirsel Temsili	İnceleme Türü	Periyot	Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar
$p(x) = -2 \cdot \sin 3x - 1$	Grafik			
	Cebirsel			

5. 3. soruda yapılan varsayımlardan yararlanarak uygun tanım ve değer kümesine sahip f trigonometrik referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = k \cdot \sin(mx + r) + s$ ($k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0$) fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.
6. Oluşturduğunuz varsayımlarla genellemelerinizi karşılaştırarak uygun tanım ve değer kümesine sahip f trigonometrik referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = k \cdot \sin(mx + r) + s$ ($k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0$) fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilgili önermelerinizi oluşturunuz. Oluşturduğunuz önermeleri sözel veya cebirsel olarak ifade ediniz.



7. Aşağıdaki soruları çözünüz. Elde ettiğiniz önermelerin gerçek yaşam bağlamlarındaki kullanışlılığını değerlendiriniz.



O noktasında sabitlenmiş, uzunluğu $|OA| = 18$ cm olan basit bir sarkaç A ve C noktaları arasında salınım hareketi yapmaktadır. Sarkaç ile dikey düzlem arasındaki açı ölçüsü x radyan olmak üzere sarkacın topuzunun yerden yüksekliğinin değişimi $f(x) = 23 - 18 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ şeklinde tanımlanan sinüs trigonometrik fonksiyonu ile modellenmiştir.

Buna göre

- a) Sarkacın topuzunun yerden yüksekliğinin bulunabilmesi için sinüs referans fonksiyonuna hangi dönüşümlerin uygulanması gerektiğini belirtiniz.
- b) Sarkaç salınım hareketini yaparken topuzun yerden yüksekliğinin arttığı ve azaldığı aralıkları bulunuz.

8. Aşağıdaki önermeleri cebirsel olarak ispatlayınız veya grafiksel olarak doğrulayınız. İspatınızı cebirsel olarak gerçekleştirirken mantık bağlaçlarını ve niceleyicileri, ispatın sistematikliğini ve matematiksel kesinliğini yansıtacak şekilde kullanınız.

- a) " $\forall x \in \mathbb{R}$ için $g(x) = \sin 4x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun $[0, 2\pi)$ nda 8 tane sıfırı vardır."

önermesinin ispatı ile ilgili aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

Tablo 10

Önermenin Sözel İspatı	Önermenin Cebirsel İspatı
$f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonunun periyodu belirlenerek $[0, 2\pi)$ nda sıfırlarının sayısı bulunur.	$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonunun periyodu 2π ve $[0, 2\pi)$ nda f fonksiyonunun sıfırlarının sayısı 2'dir.
$g(x) = \sin 4x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonu elde edilirken f trigonometrik referans fonksiyonuna yapılan dönüşüm belirlenerek g fonksiyonunun periyodu bulunur.	
$g(x) = \sin 4x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun $[0, 2\pi)$ nda sıfırlarının sayısı bulunur.	



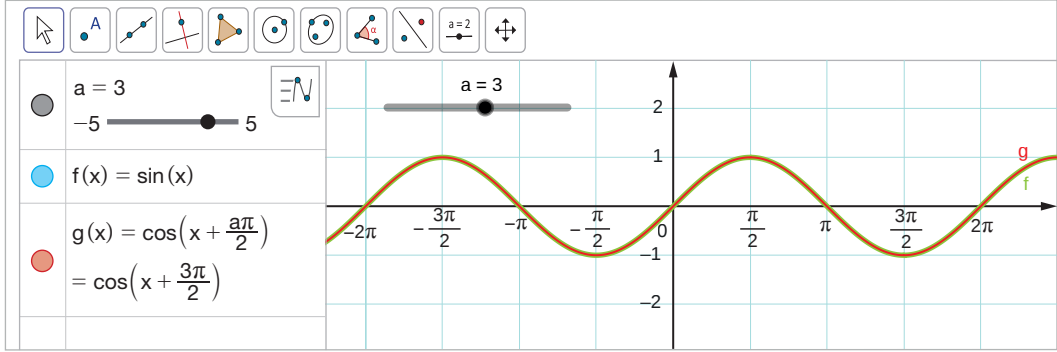
- b) " $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\sin x = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$ olur" şeklinde verilen önermeyi aşağıdaki adımları matematik yazılımında gerçekleştirerek grafiksel olarak doğrulayınız.

1. adım: Araçlar menüsünden **Sürgü** aracını seçiniz. Sayısal değerler alan a sürgüsünü tanımlayarak aralığı -5 ile 5 olarak seçiniz.

2. adım: Giriş bölümüne $f(x) = \sin x$ yazınız.

3. adım: Giriş bölümüne $g(x) = \cos\left(x + \frac{a\pi}{2}\right)$ yazınız.

Bu adımların matematik yazılımında uygulandığı benzer bir örneğin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



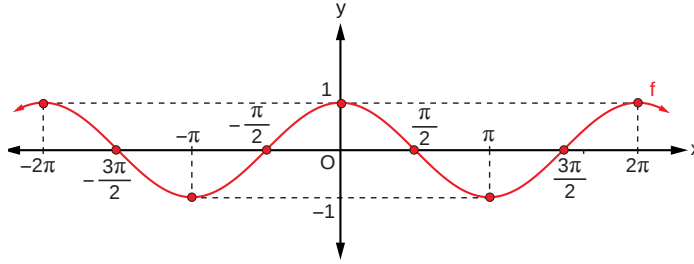
Matematiksel ispat yapmayı gerektiren Çalışma Kağıdı'na, Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na ve Öz Değerlendirme Formu'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.



9. 8. soruda kullandığınız grafik ile doğrulama veya cebirsel ispat yöntemlerinin olumlu ya da olumsuz yönleri üzerine sınıf arkadaşlarınız ile tartışınız. Bu yöntemleri kullanarak gerçek sayılarda $g(x) = 3 \cdot \sin x + 4$ şeklinde tanımlı g trigonometrik fonksiyonunun nitel özelliklerinden periyodunun ve sıfırlarının sayısının grafik ile doğrulamasını ve cebirsel ispatını yapınız. Bu yöntemleri kullanılabilirlik açısından değerlendiriniz.

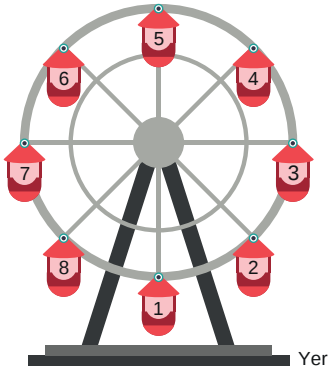
Sıra Sizde 4

Grafiği verilen $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonu için aşağıdaki soruları cevaplayınız.



1. f referans fonksiyonuna ait grafiğin y ekseninin pozitif yönünde 3 birim ötelenmesiyle g fonksiyonu oluşur. Buna göre g fonksiyonunun grafiğini çizin ve cebirsel temsilini altına yazınız.
2. f trigonometrik referans fonksiyonuna ait bağımsız değişkenin katsayısının 2 olması sonucunda elde edilen h fonksiyonunun grafiğini çizin ve cebirsel temsilini altına yazınız.
3. f trigonometrik referans fonksiyonunun grafiğinin önce y ekseninin pozitif yönünde 3 birim ötelenmesi daha sonra bağımsız değişkeninin katsayısının 2 olması sonucunda elde edilen k fonksiyonunun grafiğini çizin ve cebirsel temsilini altına yazınız.

8. Örnek

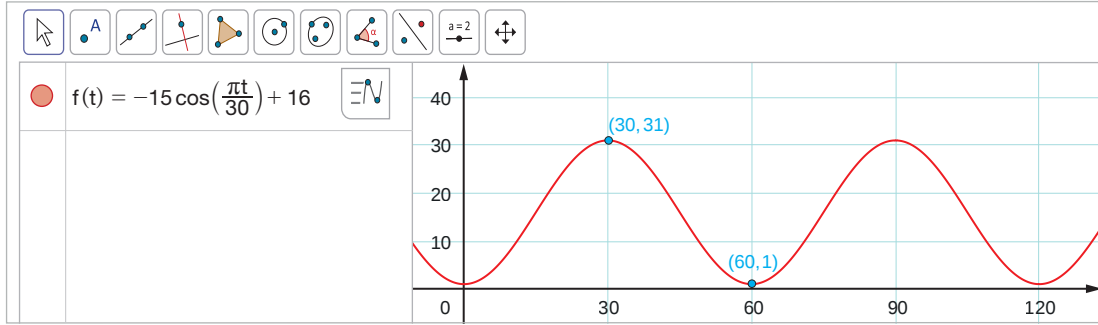


Görseldeki 15 metre yarıçap uzunluğuna sahip dönme dolap, pozitif yönde dönmektedir. Dönme dolabın 1 numaralı kabininin bağlantı noktasının yerden yüksekliği zamana bağlı olarak değişmektedir. Geçen zaman saniye cinsinden t dir. Kabinin bağlantı noktasının yerden yüksekliği ise metre cinsinden $f(t) = -15 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{30}\right) + 16$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonu ile modellenmektedir.

Buna göre f trigonometrik fonksiyonunun nitel özelliklerini bulunuz.

Çözüm

Fonksiyonun tanım kümesi $[0, \infty)$ olur. $-1 \leq \cos t \leq 1$ olduğu için dönme dolabın 1 numaralı kabininin bağlantı noktası yerden en az $-15 \cdot 1 + 16 = 1$ metre, en çok $-15 \cdot (-1) + 16 = 31$ metre yüksekliğe ulaşabilir. Fonksiyonun görüntü kümesi $[1, 31]$ olur. Fonksiyonun grafiği aşağıda verilmiştir.



$f(x) = k \cdot \cos(ax + b) + m$ ($k, a, b, m \in \mathbb{R}, k \neq 0, a \neq 0$) şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun periyodu $T = \frac{2\pi}{|a|}$ şeklinde hesaplanır. f fonksiyonun periyodu $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{30}} = 60$ olur.

Dönme dolabın kabinin bağlantı noktasının yerden yüksekliği daima pozitif olacağı için fonksiyonun işareti de daima pozitiftir.

Kabinin bağlantı noktasının yerden yüksekliği 0 ile 30. saniyeler arasında artmakta, 30 ile 60. saniyeler arasında azalmaktadır. Bu sebeple fonksiyon $[0, 30]$ nda artan, $[30, 60]$ nda azalan olur. Genelleştirilirse $k \geq 0$ tam sayı olmak üzere $[60k, 60k + 30]$ nda fonksiyon artan, $[60k + 30, 60k + 60]$ nda fonksiyon azalan olur.

Kabinin bağlantı noktasının yerden yüksekliği 30. saniyede en yüksek değerine ulaşır. Fonksiyon periyodik olduğu için $k \geq 0$ tam sayı olmak üzere $x = 60k + 30$ için fonksiyon maksimum değerine ulaşır. Kabinin bağlantı noktasının yerden yüksekliği 0. saniyede en düşük değerindedir. Fonksiyon periyodik olduğu için $k \geq 0$ tam sayı olmak üzere $x = 60k$ için fonksiyon minimum değerindedir.

Kabinin bağlantı noktasının yerden yüksekliği hiçbir zaman sıfır olamaz. Dolayısıyla fonksiyonun sıfırı yoktur.

Kabinin bağlantı noktası aynı yüksekliğe farklı zamanlarda ulaşabilmektedir. Bu yüzden fonksiyon bire bir değildir.

Kabinin bağlantı noktası, 1 ile 31 metre arasındaki her yüksekliğe ulaşabilmektedir. Bu yüzden $f: [0, \infty) \rightarrow [1, 31]$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu örtendir.

Fonksiyon sadece $k \geq 0$ için tanımlı olduğundan tek ya da çift fonksiyon değildir.

Sıra Sizde 5

Uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x) = \cos x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonuna uygun dönüşümler yapılarak elde edilen $[-4, 4]$ nda $g(x) = 1 + 2 \cos 3x$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun grafiğini çizerek aşağıdaki soruları cevaplayınız. Bu işlemler için matematik yazılımlarından yararlanınız.

1. Bire bir ve örten olup olmadığını inceleyiniz.
2. Pozitif ve negatif olduğu aralıkları bulunuz.
3. Artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.
4. Maksimum-minimum noktası ve değerini bulunuz.
5. Sıfırlarını bulunuz.
6. Periyodunu bulunuz.
7. Tek ya da çift olup olmadığını inceleyiniz.

7. Uygulama

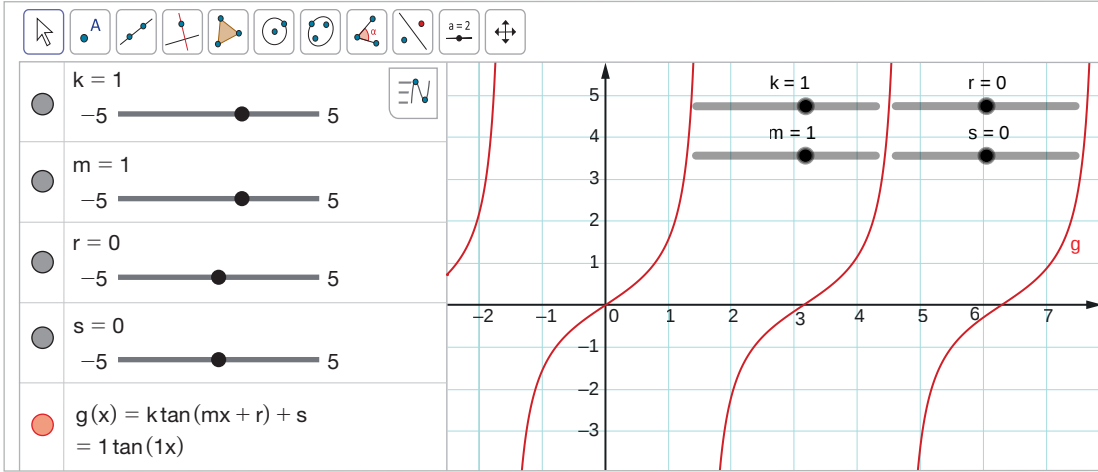
$f: \mathbb{R} - \left\{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \tan x$ Şeklinde Tanımlı Trigonometrik Referans Fonksiyonundan Türetilen $g(x) = k \cdot f(mx + r) + s$ ($k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0$) Trigonometrik Fonksiyonunun Nitel Özellikleri Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1. Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıda istenenleri gerçekleştiriniz.
 1. adım: Araçlar menüsünden **Sürgü** aracını seçiniz. Sayısal değerler alan k, m, r ve s sürgülerini tanımlayarak aralığı -5 ile 5 olarak seçiniz.
 2. adım: Cebir menüsünde yer alan **Giriş** bölümüne $g(x) = k \cdot \tan(mx + r) + s$ yazınız.
 3. adım: Sürgüleri $k = 1, m = 1, r = 0, s = 0$ seçerek $f(x) = \tan x$ trigonometrik referans fonksiyonunun grafiğini çizin.





Bu adımların matematik yazılımında uygulandığı benzer bir örneğin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



- a) $m = 1, r = 0, s = 0, k \neq 0$ iken k sürgüsüne Tablo 1'deki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 1

Fonksiyon İsmi	k Sürgüsünün Değeri	Oluşan Tanjant Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot \tan(mx + r) + s$	Tanjant Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Tanjant Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 3$	$h(x) = 3 \cdot \tan x$	Her bir bağımsız değişkenine karşılık gelen değeri 3 ile çarpma	3 kat dikey germe
n	$k = -2$			
t	$k = 5$			
p	$k = -1$			

- b) $m = 1, r = 0, k \neq 0$ iken k ve s sürgüsüne Tablo 2'deki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 2

Fonksiyon İsmi	k ve s Sürgüsünün Değeri	Oluşan Tanjant Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot \tan(mx + r) + s$	Tanjant Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Tanjant Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 1$ ve $s = 2$	$h(x) = \tan x + 2$	Her bir bağımsız değişkene karşılık gelen fonksiyon değerine 2 ekleme	y eksenı boyunca pozitif yönde 2 birim öteleme
n	$k = -1$ ve $s = 3$			
t	$k = 2$ ve $s = -1$			
p	$k = -2$ ve $s = -\frac{1}{3}$			





- c) $m \neq 0$ ve $r = 0$ iken k , s ve m sürgüsüne Tablo 3'teki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 3

Fonksiyon İsmi	k , s ve m Sürgüsünün Değeri	Oluşan Tanjant Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot \tan(mx + r) + s$	Tanjant Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Tanjant Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 1, s = 0$ ve $m = 3$	$h(x) = \tan 3x$	Her bir bağımsız değişkeni 3 ile çarpma	3 kat yatay sıkıştırma
n	$k = 1, s = 1$ ve $m = 1$			
t	$k = 2, s = 0$ ve $m = -2$			
p	$k = 4, s = \frac{1}{3}$ ve $m = \frac{1}{4}$			

- ç) $m \neq 0$ ve $k \neq 0$ iken k , s , m ve r sürgüsüne Tablo 4'teki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

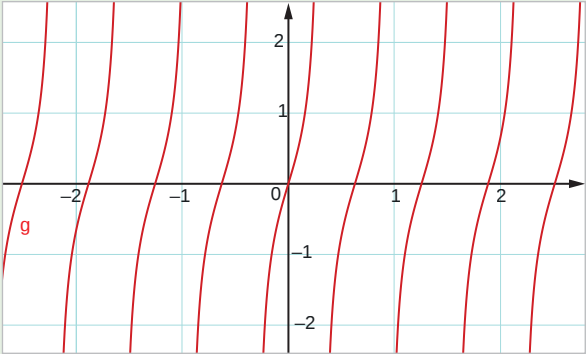
Tablo 4

Fonksiyon İsmi	k , s , m ve r Sürgüsünün Değeri	Oluşan Tanjant Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot \tan(mx + r) + s$	Tanjant Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Tanjant Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 1, s = 3,$ $m = 1$ ve $r = 2$	$h(x) = \tan(x + 2) + 3$	Her bir bağımsız değişkenin 2 fazlasının fonksiyon değerine 3 ekleme	x eksenini boyunca negatif yönde 2 birim, y eksenini boyunca pozitif yönde 3 birim öteleme
n	$k = 1, s = 0,$ $m = 1$ ve $r = 4$			
t	$k = 3, s = -1,$ $m = 2$ ve $r = -1$			
p	$k = -1, s = 1,$ $m = -2$ ve $r = 0$			



2. Uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x) = \tan x$ şeklinde tanımlı f trigonometrik referans fonksiyonuna uygulanan dönüşümler sonucunda elde edilen tanjant fonksiyonlarının cebirsel ve grafik temsilini bularak Tablo 5'i örnekteki gibi doldurunuz. Fonksiyonların grafik temsillerini matematik yazılımlarını kullanarak oluşturunuz.

Tablo 5

f Fonksiyonunun Grafiğine Uygulanan Dönüşüm	Cebirsel Temsil	Grafik Temsili
5 kat yatay sıkıştırma	$g(x) = \tan 5x$	
y eksenine göre yansıma ve x eksenini boyunca negatif yönde 3 birim öteleme		
x eksenine göre yansıma, y eksenini boyunca negatif yönde 1 birim öteleme		

3. $f(x) = \tan x$ şeklinde tanımlı f trigonometrik referans fonksiyonun nitel özelliklerinden hareketle Tablo 6 ve Tablo 7'de cebirsel temsili verilen tanjant fonksiyonlarının nitel özellikleri ile ilgili varsayımlarınızı örnekteki gibi ifade ediniz.

Tablo 6

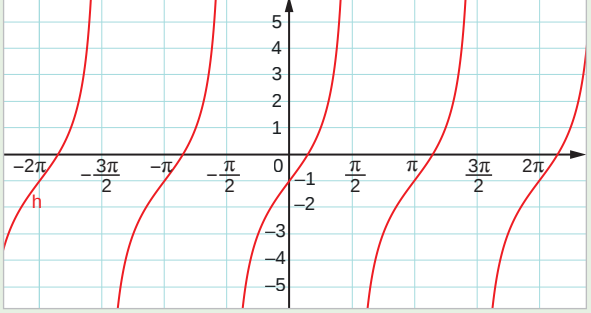
$h: [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -1 + 2 \cdot \tan x$	
Nitel Özellikler	Varsayımlar
Tanım Kümesi	Tanım kümesi $[0, \frac{\pi}{2})$ dır.
Görüntü Kümesi	
Bire birliği	
Örtenliği	
Periyodu	
Sıfırları	
İşareti	
Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	
Artanlığı-Azalanlığı	
Teklik-Çiftlik	

Tablo 7

$g(x) = k \cdot \tan(mx + r) + s (k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0)$	
Nitel Özellikler	Varsayımlar
Tanım Kümesi	Tanım kümesi $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{r}{m} + (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2m}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
Görüntü Kümesi	
Bire birliği	
Örtenliği	
Periyodu	
Sıfırları	
İşareti	
Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	
Artanlığı-Azalanlığı	
Teklik-Çiftlik	

4. Aşağıda $f: \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \tan x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonundan türetilmiş bazı fonksiyonlar verilmiştir.
- a) Verilen fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımlarını kullanarak çiziniz. Tablo 8'i örnekteki gibi doldurunuz.

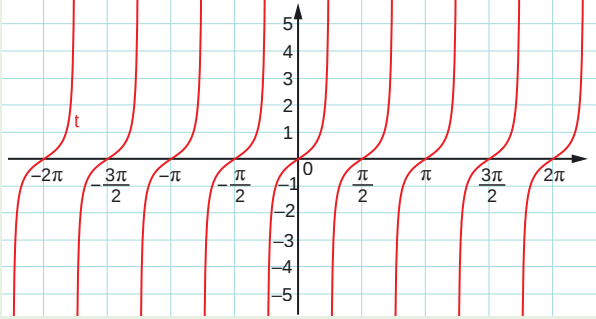
Tablo 8

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	İnceleme Türü	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi
$h(x) = -1 + 2 \cdot \tan x$	Grafik		
	Cebirsel	Grafik incelendiğinde h fonksiyonunun $\frac{\pi}{2}$ de tanımsız olduğu görülür. h fonksiyonu periyodik olduğundan tanjant fonksiyonu $\forall x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ için tanımsız olur. Tanım kümesi $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ olur.	Grafik incelendiğinde h fonksiyonunun görüntü kümesinin $\mathbb{R}$ olduğu görülür.
$n(x) = \tan(x - 1) + 2$	Cebirsel	f trigonometrik referans fonksiyonu $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ de tanımlıdır. $h(x) = 2 \cdot f(x) - 1 = 2 \cdot \tan x - 1$ olduğu için h fonksiyonunun da tanım kümesi $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ olur.	f trigonometrik referans fonksiyonun görüntü kümesi $\mathbb{R}$ dir. $h(x) = 2 \cdot f(x) - 1 = 2 \cdot \tan x - 1$ olduğu için h fonksiyonunun da görüntü kümesi $\mathbb{R}$ olur.
	Grafik		
	Cebirsel		



- b) Verilen fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımlarını kullanarak çiziniz. Tablo 9'u örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 9

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	İnceleme Türü	Periyot	Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar
$t(x) = \frac{1}{3} \cdot \tan 2x$				
	Grafik	Grafik incelendiğinde t fonksiyonunun periyodik olduğu görülür. f trigonometrik referans fonksiyonunun periyodu π dir. t fonksiyonunun grafiği, f fonksiyonunun grafiğinin 2 kat yatay sıkıştırılmış şeklidir. Bu durumda t fonksiyonunun periyodu referans fonksiyonun periyodunun $\frac{1}{2}$'si olur. Bu sebeple t fonksiyonunun periyodu $\frac{\pi}{2}$ olur.	t fonksiyonunun maksimum-minimum noktası ve değeri yoktur.	Grafik incelendiğinde t fonksiyonunun tanım aralığının her noktasında artan fonksiyon olduğu görülür.
	Cebirsel	$g(x) = k \cdot \tan(mx + r) + s$ trigonometrik fonksiyonunun grafiği, m gerçek sayısının mutlak değerine bağlı olarak yatay sıkıştırma ve germeye sebep olur. Bu nedenle periyot $T = \frac{\pi}{ m }$ şeklinde hesaplanır. t fonksiyonunun periyodu $m = 2$ için $T = \frac{\pi}{2}$ olur.		$t(x) = \frac{1}{3} \cdot f(2x) = \frac{1}{3} \cdot \tan 2x$ olduğu için t fonksiyonunun grafiği, f fonksiyonu gibi tanım aralığında artan olur. Buna göre t fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ için artan olur.



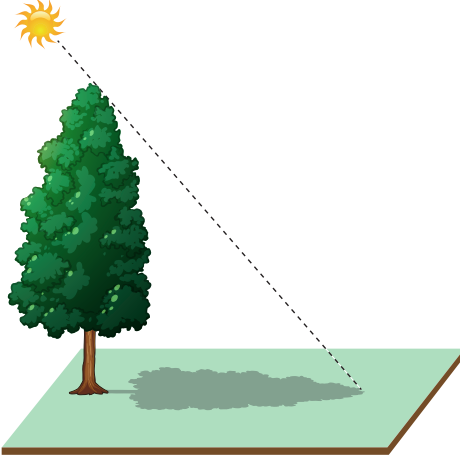


Fonksiyonun Cebirsel Temsili	İnceleme Türü	Periyot	Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar
$p(x) = -\tan 3x + 1$	Grafik			
	Cebirsel			

5. 3. soruda yapılan çalışmalardan elde ettiğiniz nitel özelliklere ait varsayımlarınızı kullanarak uygun tanım ve değer kümesine sahip f trigonometrik referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = k \cdot \tan(mx + r) + s$ ($k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0$) fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.
6. Oluşturduğunuz varsayımlarla genellemelerinizi karşılaştırarak uygun tanım ve değer kümesine sahip f trigonometrik referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = k \cdot \tan(mx + r) + s$ ($k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0$) fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilgili önermelerinizi oluşturunuz. Oluşturduğunuz önermeleri sözel veya cebirsel olarak ifade ediniz.



7. Aşağıdaki soruları çözünüz. Elde ettiğiniz önermelerin gerçek yaşam bağlamındaki kullanışlılığını değerlendiriniz.



Yanda bir ağacın öğle vaktindeki görseli verilmiştir. Ağacın 12.00 ile 16.00 arasında oluşan gölge boyunun (m) zamana bağlı (sa.) değişimi, $f(t) = 6 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{12}(t - 12)\right) + 2$ şeklinde tanımlanan tanjant trigonometrik fonksiyonu ile modellenmiştir. Buna göre

- a) Ağacın gölge boyunun en kısa olduğu saati ve değeri bulunuz.

- b) Ağacın gölge boyunu veren f fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

8. Aşağıdaki önermeleri cebirsel olarak ispatlayınız veya grafiksel olarak doğrulayınız. İspatınızı cebirsel olarak gerçekleştirirken mantık bağlaçlarını ve niceleyicileri, ispatın sistematikliğini ve matematiksel kesinliğini yansıtacak şekilde kullanınız.

- a) " $g: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 5 \cdot \tan 3x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyon tek fonksiyondur." önermesinin ispatı ile ilgili verilen aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Önermenin Sözel İspatı	Önermenin Cebirsel İspatı
$g(x) = 5 \cdot \tan 3x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonda bağımsız değişkenin toplama işlemine göre tersi alınarak elde edilen yeni fonksiyonun cebirsel temsili bulunur.	
Elde edilen fonksiyonda tek fonksiyon olma şartının cebirsel temsili kullanılarak fonksiyon dönüşümü sağlanır.	
Elde edilen son cebirsel temsil, g fonksiyonu türünden ifade edilir.	
$-g(x) = g(-x)$ olduğu gösterilerek ispat tamamlanır.	

- b) " $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\tan x = -\cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ olur." şeklinde verilen önermeyi aşağıdaki adımları matematik yazılımında gerçekleştirerek grafiksel olarak doğrulayınız.

1. adım: Araçlar menüsünden **Sürgü** aracını seçiniz. Sayısal değerler alan a ve b sürgülerini tanımlayarak aralığı -5 ile 5 olarak seçiniz.



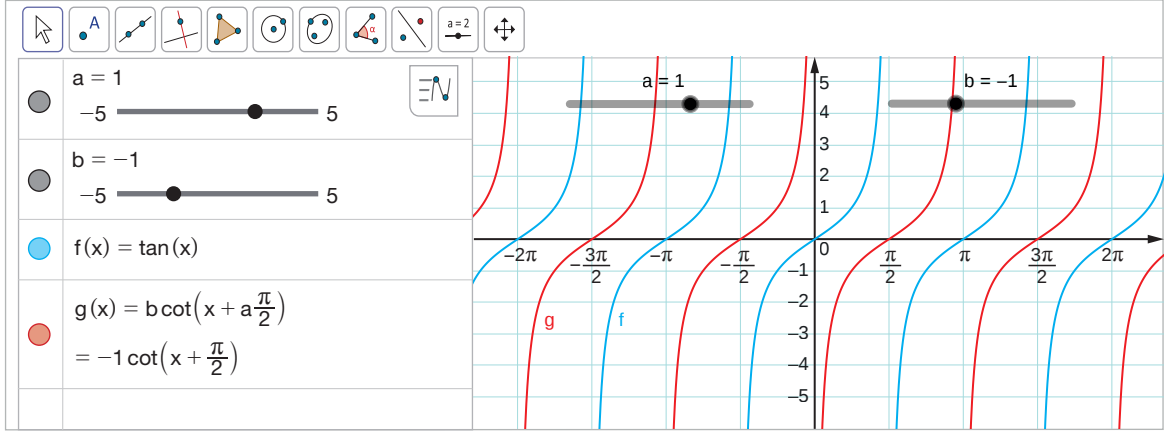


2. adım: $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için **Giriş** bölümüne $f(x) = \tan x$ yazınız.

3. adım: Aynı işlemi $g(x) = b \cdot \cot\left(x + a \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için de yapınız.

Oluşan trigonometrik fonksiyonların grafiklerini inceleyerek grafiklerdeki değişimleri gözlemleyiniz.

Bu adımların matematik yazılımında uygulandığı benzer bir örneğin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



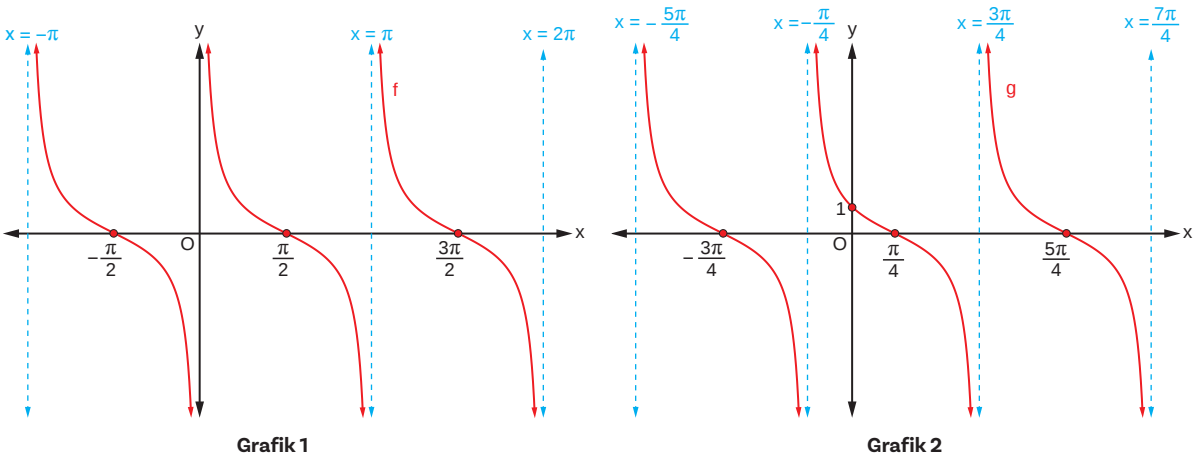
9. Doğrulama yöntemlerinizi kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

9. Örnek

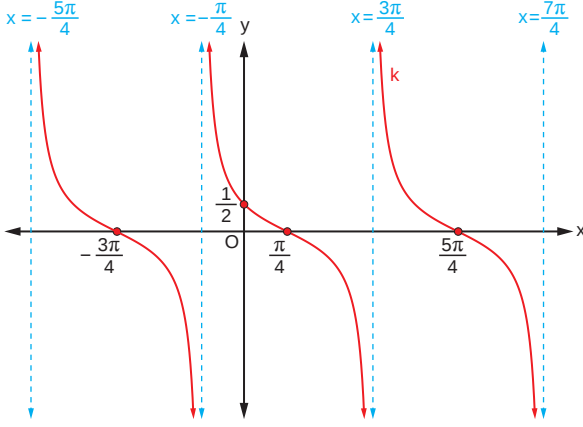
Uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x) = \cot x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonunun grafik temsili üzerinden yapılan dönüşümlerle elde edilen $h(x) = \frac{1}{2} \cdot \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Bu fonksiyonun grafik temsili ile cebirsel temsili arasındaki ilişkiyi ifade ediniz.

Çözüm

Öncelikle Grafik 1'de yer alan f trigonometrik referans fonksiyonunun grafiğine x eksenini boyunca negatif yönde $\frac{\pi}{4}$ birim öteleme yapılmasıyla oluşturulan $g(x) = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği, Grafik 2'deki gibi elde edilir.

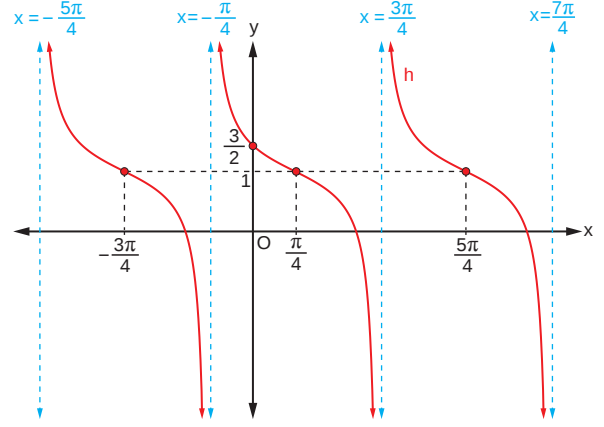


► Grafik 2'deki g fonksiyonunun değerlerinin $\frac{1}{2}$ katının alınmasıyla oluşturulan $k(x) = \frac{1}{2} \cdot \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ şeklinde tanımlı fonksiyonun grafiği Grafik 3'teki gibi elde edilir.



Grafik 3

Grafik 3'teki k fonksiyonunun grafiğini y ekseninde pozitif yönde 1 birim ötelenmesiyle oluşturulan $h(x) = \frac{1}{2} \cdot \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ şeklinde tanımlı fonksiyonun grafiği Grafik 4'teki gibi elde edilir.

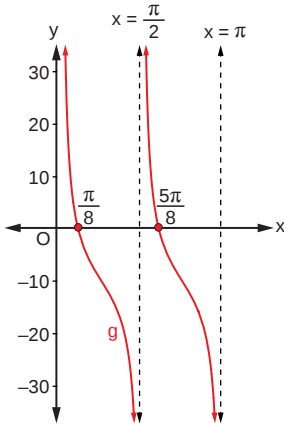


Grafik 4

10. Örnek

Uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x) = \cot x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonun grafiğine uygun dönüşümler yapılarak elde edilen $g(x) = 4 \cdot \cot 2x - 4$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun $(0, \pi)$ nda nitel özelliklerini bulunuz.

Çözüm



Yandaki g fonksiyonunun grafik temsili incelendiğinde tanım kümesinin $(0, \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ olduğu görülür. Fonksiyon tüm gerçekteki sayı değerlerini alabilir. Bu nedenle g fonksiyonunun görüntü kümesi $\mathbb{R}$ dir. Fonksiyonun periyodu grafikten görüldüğü üzere $\frac{\pi}{2}$ dir. Grafik incelendiğinde g fonksiyonunun azalan olduğu görülür. g fonksiyonun sıfırları $x = \frac{\pi}{8}$ ve $x = \frac{5\pi}{8}$ olur. g fonksiyonunun grafiği incelendiğinde $(0, \frac{\pi}{8})$ ve $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8})$ nda işaretinin pozitif, $(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2})$ ve $(\frac{5\pi}{8}, \pi)$ nda işaretinin negatif olduğu görülür. g fonksiyonunun tanım aralığında maksimum ve minimum noktası yoktur. g fonksiyonu grafikte $(0, \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ nda örten fonksiyondur ama bire bir fonksiyon değildir.

Sıra Sizde 6

Uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x) = \cot x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonun grafiğine uygun dönüşümler yapılarak elde edilen $(0, 3]$ nda $g(x) = 1 - \sqrt{3} \cot x$ şeklinde tanımlı fonksiyonun grafiğini çizerek aşağıdaki soruları cevaplayınız. Bu işlemler için matematik yazılımlarından yararlanınız.

1. Bire bir ve örten olup olmadığını inceleyiniz.

2. Pozitif ve negatif olduğu aralıkları bulunuz.
3. Artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.
4. Maksimum-minimum noktası ve değerini bulunuz.
5. Sıfırını bulunuz.
6. Periyodunu bulunuz.
7. Tek ya da çift olup olmadığını inceleyiniz.

Araştırma Ödevi

Aşağıdaki görevleri gerçekleştirerek araştırma ödevini öğretmeninizin belirlediği süre içerisinde eksiksiz olarak tamamlayınız.

- ▮ Trigonometrik fonksiyonların periyotlarını gerçek yaşam durumlarıyla ilişkilendiren örnek problem durumlarını araştırınız.
- ▮ Belirlediğiniz gerçek yaşam durumuna uygun fonksiyonların bağımlı ve bağımsız değerlerini içeren bir tablo oluşturunuz.
- ▮ Tablodaki veriler yardımıyla fonksiyonun cebirsel temsilini oluşturup grafiğini çizin.
- ▮ Gerçek yaşam durumunu yansıtmayı amaçıyla oluşturduğunuz fonksiyonun periyodunu bulunuz.
- ▮ Yaptığınız çalışmanın tüm aşamalarını içeren bir rapor hazırlayıp sınıf arkadaşlarınıza sununuz.
- ▮ Çalışmanız analitik dereceli puanlama anahtarı kullanılarak öğretmeniniz tarafından değerlendirilecektir.

Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.



11. Örnek

Uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $g(x) = -\sin x$, $h(x) = \sin(\pi + x)$, $m(x) = \tan\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$ ve $n(x) = -\cot x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonların grafik temsililerini kullanarak aşağıdaki eşitlikleri doğrulayınız.

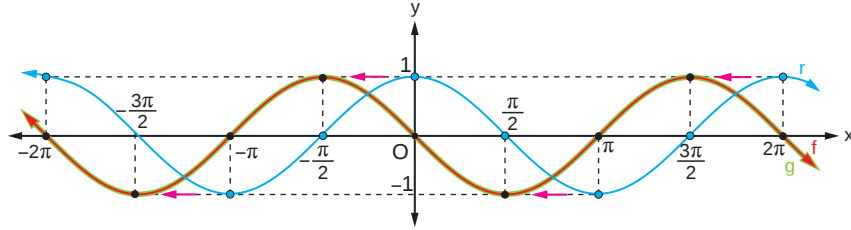
1. $f(x) = g(x)$

2. $h(x) = g(x)$

3. $m(x) = n(x)$

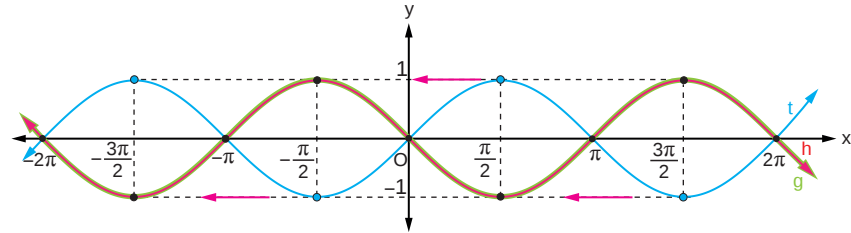
Çözüm

1.



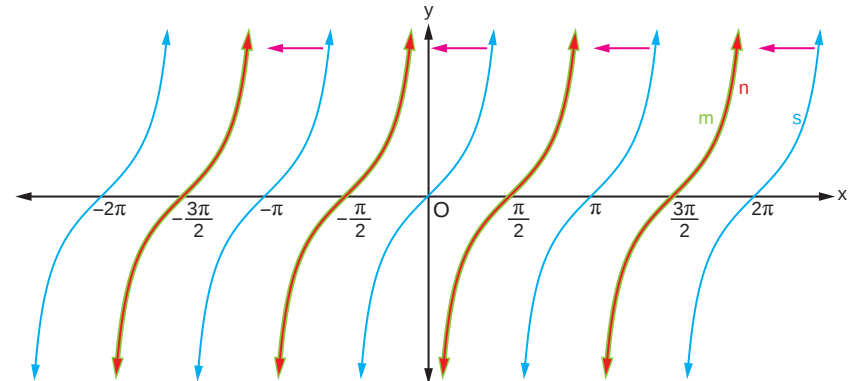
Grafik incelemesi yapıldığında $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun $r(x) = \cos x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonunun x eksenı boyunca $\frac{\pi}{2}$ birim negatif yönde ötelenmiş hâli olduğu ve $g(x) = -\sin x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiğiyle çakıştığı görülür.

2.



Grafik incelemesi yapıldığında $h(x) = \sin(\pi + x)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun $t(x) = \sin x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonunun x eksenı boyunca π birim negatif yönde ötelenmiş hâli olduğu ve $g(x) = -\sin x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiğiyle çakıştığı görülür.

3.



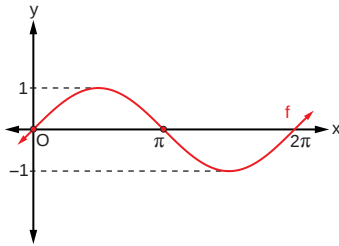
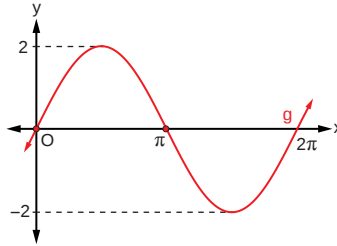
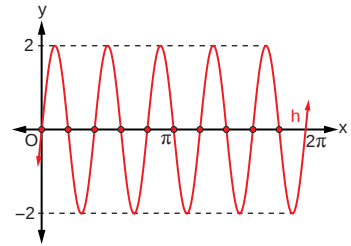
Grafik incelemesi yapıldığında $m(x) = \tan\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun $s(x) = \tan x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonunun x eksenı boyunca $\frac{3\pi}{2}$ birim pozitif yönde ötelenmiş hâli olduğu ve $n(x) = -\cot x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiğiyle çakıştığı görülür.

12. Örnek

- $\forall x \in \mathbb{R}$ için $g(x) = \frac{4 \cdot \cos 2x - 3}{5}$ şeklinde tanımlı g trigonometrik fonksiyonunun görüntü kümesinin $\left[-\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right]$ olduğunu mantık bağlaçları ve niceleyicilerden yararlanarak cebirsel olarak ispatlayınız.
- $\forall x \in \mathbb{R}$ için $h(x) = 2 \cdot \sin 5x$ şeklinde tanımlı h fonksiyonunun $[0, 2\pi)$ nda 10 tane sıfırı olduğunu cebirsel temsil ve grafik temsilinden yararlanarak doğrulayınız.

Çözüm

- $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = \cos x$ trigonometrik referans fonksiyonunun görüntü kümesi $[-1, 1]$ dir. Buradan eşitsizlik üzerinde işlemler yapılarak g fonksiyonu elde edilir. Buna göre $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow -4 \leq 4 \cdot \cos 2x \leq 4$
 $-7 \leq 4 \cdot \cos 2x - 3 \leq 1 \Rightarrow -\frac{7}{5} \leq \frac{4 \cdot \cos 2x - 3}{5} \leq \frac{1}{5}$ olur. Buradan g trigonometrik fonksiyonunun görüntü kümesi $\left[-\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right]$ olarak bulunur.
- Fonksiyonun cebirsel temsili kullanılarak doğrulanması için öncelikle h trigonometrik fonksiyonunun periyodu bulunur. $f(x) = k \cdot \sin(ax + b) + m$, ($k, a, b, m \in \mathbb{R}, k \neq 0$ ve $a \neq 0$) şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun periyodu $T = \frac{2\pi}{|a|}$ şeklinde hesaplanır. Buna göre h trigonometrik fonksiyonunun periyodu $T = \frac{2\pi}{5}$ bulunur. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = \sin x$ trigonometrik referans fonksiyonunun $[0, 2\pi)$ ndaki sıfırlarının sayısı 2'dir. $h(x) = 2 \cdot \sin 5x$ fonksiyonunun $[0, 2\pi)$ ndaki sıfırlarının sayısı 5 katına çıkarak 10 olur. Fonksiyonun grafik temsili kullanılarak elde edilen gösterimi aşağıdaki gibidir.

 $f(x) = \sin x$ grafiği $g(x) = 2 \cdot \sin x$ grafiği $h(x) = 2 \cdot \sin 5x$ grafiği

Grafiklerden görüldüğü üzere h fonksiyonunun sıfırları $\forall x \in \mathbb{R}$ için $[0, 2\pi)$ nda 10 tanedir.

Sıra Sizde 7

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 2 \cdot \cos(4x + 5)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun $[0, 2\pi)$ nda 8 tane sıfırı olduğunu grafik temsillerinden yararlanarak gösteriniz.

Kontrol Noktası

sin x	1. a, b, k ve $r \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0, k \neq 0, b > 0$ ve $r > 0$) olmak üzere $f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyondan türetilen $g(x) = k \cdot \sin(a(x+b)) + r$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilirken şu adımlar uygulanır: 1. adım: $f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonu x ekseninin negatif yönünde b birim ötelenerek $m(x) = \sin(x+b)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir. 2. adım: $m(x) = \sin(x+b)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği a değeri arttıkça yatayda sıkıştırılarak, a değeri azaldıkça yatayda gerilerek $n(x) = \sin(a(x+b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir. 3. adım: $n(x) = \sin(a(x+b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun değerlerini k katına eşleyen $s(x) = k \cdot \sin(a(x+b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir. 4. adım: $s(x) = k \cdot \sin(a(x+b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyon, y eksenini boyunca pozitif yönde r birim ötelenerek $g(x) = k \cdot \sin(a(x+b)) + r$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir.
	2. a, b, k ve $r \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$ ve $k \neq 0$) olmak üzere gerçekte sayılarda tanımlı $g(x) = k \cdot \sin(a(x+b)) + r$ trigonometrik formunda verilen fonksiyonun nitel özellikleri • Tanım kümesi $\mathbb{R}$, görüntü kümesi $[r - k , r + k]$ dır. • Periyodu $\frac{2\pi}{ a }$ dır ve fonksiyon bire bir değildir. • Maksimum değeri $r + k$ ve minimum değeri $r - k$ dır.
cos x	1. a, b, k ve $r \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0, k \neq 0, b > 0$ ve $r > 0$) olmak üzere $f(x) = \cos x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyondan türetilen $g(x) = k \cdot \cos(a(x+b)) + r$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilirken şu adımlar uygulanır: 1. adım: $f(x) = \cos x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonu x ekseninin negatif yönünde b birim ötelenerek $m(x) = \cos(x+b)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir. 2. adım: $m(x) = \cos(x+b)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği a değeri arttıkça yatayda sıkıştırılarak, a değeri azaldıkça yatayda gerilerek $n(x) = \cos(a(x+b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir. 3. adım: $n(x) = \cos(a(x+b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun değerlerini k katına eşleyen $s(x) = k \cdot \cos(a(x+b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir. 4. adım: $s(x) = k \cdot \cos(a(x+b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyon, y eksenini boyunca pozitif yönde r birim ötelenerek $g(x) = k \cdot \cos(a(x+b)) + r$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir. 2. a, b, k ve $r \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$ ve $k \neq 0$) olmak üzere gerçekte sayılarda tanımlı $g(x) = k \cdot \cos(a(x+b)) + r$ trigonometrik formunda verilen fonksiyonun nitel özellikleri • Tanım kümesi $\mathbb{R}$, görüntü kümesi $[r - k , r + k]$ dır. • Periyodu $\frac{2\pi}{ a }$ dır ve fonksiyon bire bir değildir. • Maksimum değeri $r + k$ ve minimum değeri $r - k$ dır.

tan x

1. a, b, k ve $r \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0, k \neq 0, b > 0$ ve $r > 0$) olmak üzere $f(x) = \tan x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyondan türetilen $g(x) = k \cdot \tan(a(x + b)) + r$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun grafiği çizilirken şu adımlar uygulanır:
1. adım: $f(x) = \tan x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonu x ekseninin negatif yönünde b birim ötelenerek $m(x) = \tan(x + b)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir.
 2. adım: $m(x) = \tan(x + b)$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun grafiği $|a|$ değeri arttıkça yatayda sıkıştırılarak, $|a|$ değeri azaldıkça yatayda gerilerek $n(x) = \tan(a(x + b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir.
 3. adım: $n(x) = \tan(a(x + b))$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun değerlerini k katına eşleyen $s(x) = k \cdot \tan(a(x + b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir.
 4. adım: $s(x) = k \cdot \tan(a(x + b))$ şeklinde tanımlı fonksiyonu y eksenini boyunca pozitif yönde r birim ötelenerek $g(x) = k \cdot \tan(a(x + b)) + r$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir.
2. a, b, k ve $r \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$ ve $k \neq 0$) olmak üzere gerçekte sayılarda tanımlı $g(x) = k \cdot \tan(a(x + b)) + r$ trigonometrik formunda verilen fonksiyonun nitel özellikleri
- Tanım kümesi $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + t \cdot \pi \right) - b, t \in \mathbb{Z} \right\}$, görüntü kümesi $\mathbb{R}$ dir.
 - Örtten fonksiyondur ve bire bir fonksiyon değildir.
 - Periyodu $\frac{\pi}{|a|}$ dir. Maksimum ve minimum değeri yoktur.

cot x

1. a, b, k ve $r \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0, k \neq 0, b > 0, r > 0$ ve $k > 0$) olmak üzere $f(x) = \cot x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyondan türetilen $g(x) = k \cdot \cot(a(x + b)) + r$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun grafiği çizilirken şu adımlar uygulanır:
1. adım: $f(x) = \cot x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonu x ekseninin negatif yönünde b birim ötelenerek $m(x) = \cot(x + b)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir.
 2. adım: $m(x) = \cot(x + b)$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun grafiği $|a|$ değeri arttıkça yatayda sıkıştırılarak, $|a|$ değeri azaldıkça yatayda gerilerek $n(x) = \cot(a(x + b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir.
 3. adım: $n(x) = \cot(a(x + b))$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun değerlerini k katına eşleyen $s(x) = k \cdot \cot(a(x + b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir.
 4. adım: $s(x) = k \cdot \cot(a(x + b))$ şeklinde tanımlı fonksiyonu y eksenini boyunca pozitif yönde r birim ötelenerek $g(x) = k \cdot \cot(a(x + b)) + r$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir.
2. a, b, k ve $r \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$ ve $k \neq 0$) olmak üzere gerçekte sayılarda tanımlı $g(x) = k \cdot \cot(a(x + b)) + r$ trigonometrik formunda verilen fonksiyonun nitel özellikleri
- Tanım kümesi $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{a} \cdot t \cdot \pi - b, t \in \mathbb{Z} \right\}$, görüntü kümesi $\mathbb{R}$ dir.
 - Örtten fonksiyondur ve bire bir fonksiyon değildir.
 - Periyodu $\frac{\pi}{|a|}$ dir. Maksimum ve minimum değeri yoktur.

Ek soruların yer aldığı 3. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.
(İçerik: Trigonometrik Referans Fonksiyonlardan Türetilen Fonksiyonlar ve Nitel Özellikleri)



Alıştırmalar

1. Aşağıdaki boşlukları kutularda verilen ifadelerden uygun olanlarla doldurunuz.

1

Pozitif

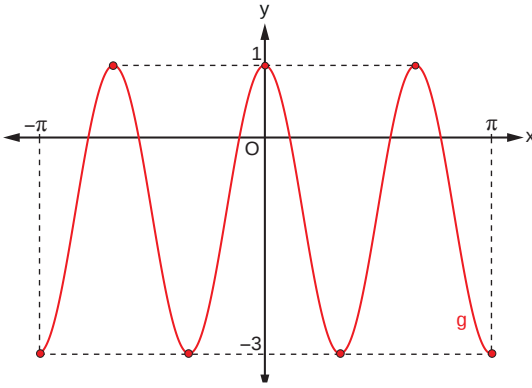
-1

Negatif

 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

- a) Başlangıç noktası, birim çemberdeki x ekseninde ve ölçüsü $-\frac{\pi}{2}$ olan yayın bitim noktasının koordinatları toplamı olur.
- b) $A\left(-\frac{1}{2}, k\right)$ noktası birim çember üzerinde olduğuna göre k nin pozitif değeri olur.
- c) Birim çember üzerinde alınan her noktanın koordinatlarının kareleri toplamı olur.
- ç) Ölçüsü -220° olan açı yönlüdür.

2.



Yanda $f(x) = \cos x$ trigonometrik referans fonksiyonuna uygun dönüşümler yapılarak elde edilen $[-\pi, \pi]$ nda $g(x) = 2 \cdot \cos 3x - 1$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyon verilmiştir.

Buna göre g fonksiyonu için verilen

- I. Bire bir fonksiyondur.
- II. Sıfırları 6 tanedir.
- III. Maksimum değeri 1'dir.
- IV. Periyodu $\frac{2\pi}{3}$ dir.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

3. x ve y birer gerçekte sayı olmak üzere $A = 3 \cdot \sin x - 1$ ve $B = 2 \cdot \cos y + 5$ biçiminde tanımlanıyor. Buna göre $2A - 5B$ ifadesinin alabileceği en büyük tam sayı değerini bulunuz.

4. Aşağıda gerçekte sayılarda tanımlı $f(x) = \sin x$ trigonometrik referans fonksiyonundan dönüştürülen dört fonksiyon verilmiştir.

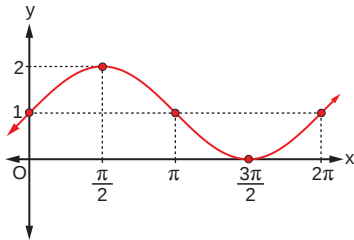
I. $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

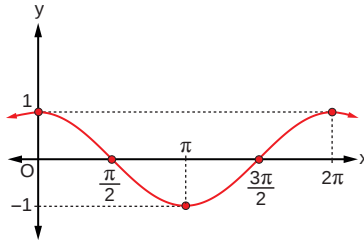
II. $f(x) + 1$

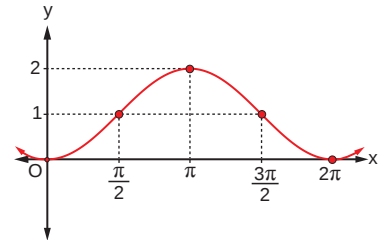
III. $1 + 2f(\pi - x)$

IV. $1 - f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

Bu fonksiyonların cebirsel temsillerini grafiklerin altlarında yer alan boşluklara yazınız.







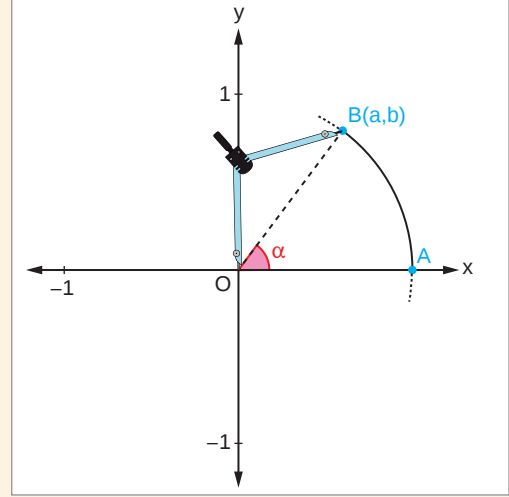
3.2. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARLA İFADE EDİLEBİLEN DENKLEMLER İÇEREN PROBLEMLER

Konuya Başlarken

Bir ucu orijine sabitlenmiş olan pergeli kullanarak 1 birim yarıçap uzunluğunda çember çizilecektir. Şekil 3.2'de verilen pergeli, A noktasından başlanarak B(a, b) noktasında biten bir yay oluşturulması için pozitif yönde α açı ölçüsü kadar döndürülmektedir.

Buna göre

1. B noktasından başlanarak pozitif yönde çizime devam edildiğinde B noktası ile aynı ordinata sahip ilk nokta C noktası olmaktadır. Buna göre BC yayını çizerek C'nin koordinatlarını α türünden ifade ediniz.
2. B ve C noktalarına çizilen yarıçapların x eksenini oluşturduğu pozitif yönlü açı ölçülerinin sinüs değerlerini karşılaştırarak yorumlayınız.
3. C noktasından başlanarak pozitif yönde çizime devam edildiğinde sırasıyla x ve y eksenlerine uzaklıkları B noktası ile aynı olan ilk nokta D noktası olmaktadır. DC yayını çizerek D'nin koordinatlarını α türünden ifade ediniz.
4. D ve B noktalarına çizilen yarıçapların x eksenini oluşturduğu pozitif yönlü açı ölçülerinin tanjant değerlerini karşılaştırınız ve yorumlayınız.
5. A noktasından başlanarak negatif yönde çizime devam edildiğinde B noktası ile aynı apsise sahip ilk nokta E noktası olmaktadır. BE yayını çizerek E'nin koordinatlarını α türünden ifade ediniz.
6. E ve B noktalarına çizilen yarıçapların x eksenini oluşturduğu pozitif yönlü açı ölçülerinin kosinüs değerlerini karşılaştırınız ve yorumlayınız.



Şekil 3.2: Pergel ve AB yayı

8. Uygulama



Trigonometrik Referans Fonksiyonlardan Türetilen Fonksiyonlarla Oluşturulan Denklemler

Aşağıda gerçek yaşam durumlarında kullanılan trigonometrik fonksiyonları içeren sorular bulunmaktadır. Öğretmeniniz rehberliğinde beşer kişilik gruplar oluşturunuz. Aşağıdaki problem durumunu inceleyiniz.

2022 yılında tamamlanan görseldeki 1915 Çanakkale Köprüsü, çelik asma yapısı ve zarif kirişleriyle Çanakkale Boğazı'nda yer almaktadır.



Mühendislik harikası olarak kabul edilen bu yapı, dünyanın en uzun orta açıklıklı köprüsüdür. Köprü tabliyesinin orta noktası, rüzgâr ve araç geçişinin etkisiyle dikey titreşim yapmaktadır. Kış ve yaz mevsiminde yapılan ölçümler; köprü tabliyesinin yaz mevsiminde denge pozisyonundan 20 cm yukarıya ve 20 cm aşağıya doğru, kış mevsiminde denge pozisyonundan 10 cm yukarıya ve 10 cm aşağıya doğru sabit hareketle titreştiğini göstermektedir. Her bir titreşim hareketi 6 saniyede tamamlanmaktadır. Köprüdeki bu hareket sırasında enerji kaybı yaşanmadığı varsayılmaktadır.

Başlangıçta denge konumunda bulunan köprünün yaptığı titreşim hareketiyle köprü tabliyesinin dikey konumunun (m) zamana (sa.) bağlı değişimini yaz mevsiminde modelleyen fonksiyon f , kış mevsiminde modelleyen fonksiyon ise g olmaktadır.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. 1915 Çanakkale Köprüsü'nün tabliyesinin denge konumuna göre dikey mesafesinin süreye bağlı değişimini ifade eden f ve g fonksiyonlarının cebirsel temsillerini bulunuz.
2. f ve g fonksiyonlarının sıfırları ve periyotlarını bulunuz. Bulduğunuz değerlerin problem bağlamındaki anlamını ifade ediniz.
3. a) Köprü tabliyesinin denge konumuna göre dikey mesafesinin aynı olduğu süreyi gösteren $f = g$ denkleminin cebirsel ve grafik temsilini bulunuz. Grafik temsillerini ifade ederken matematik yazılımlarından yararlanınız.





b) a maddesinde elde ettiğiniz temsilleri kullanarak f ve g fonksiyonlarının periyotlarının $f = g$ denkleminin çözümü bağlamındaki anlamını ifade ediniz.

4. Elde ettiğiniz ve yorumladığınız farklı temsillerden yararlanarak problemin çözümü için bir strateji oluşturunuz.

5. Çözüm stratejinizi kullanarak problemi çözünüz.

6. Matematik yazılımı yardımıyla problemin çözümünden elde ettiğiniz denkleme ait grafikleri aşağıdaki adımları gerçekleştirerek çiziniz.

1. adım: Giriş bölümüne f fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

2. adım: Giriş bölümüne g fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

Grafiklerden yararlanarak problemin çözümünü doğrulayınız.

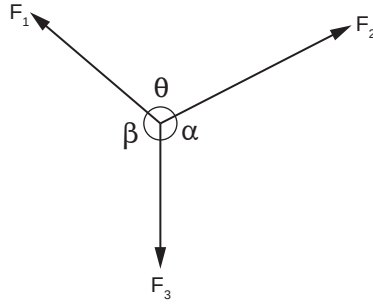
7. Problemin çözümünde kullandığınız yöntemleri karşılaştırarak çözümlerinizi doğrulayınız. Hangi yöntemin daha kullanışlı olduğunu açıklayınız.

8. Problemin çözümünde kullanılabilecek olası çözüm stratejilerini belirleyiniz. Bu stratejilerin iki fonksiyonun birbiri ile ilişkisini içeren başka problemlerin çözümünde nasıl kullanılabileceği ile ilgili çıkarımlarda bulunuz. Elde ettiğiniz çıkarımları matematiksel modele dönüştürerek sonraki sayfada bulunan gerçek yaşam durumu probleminde uygulayınız.

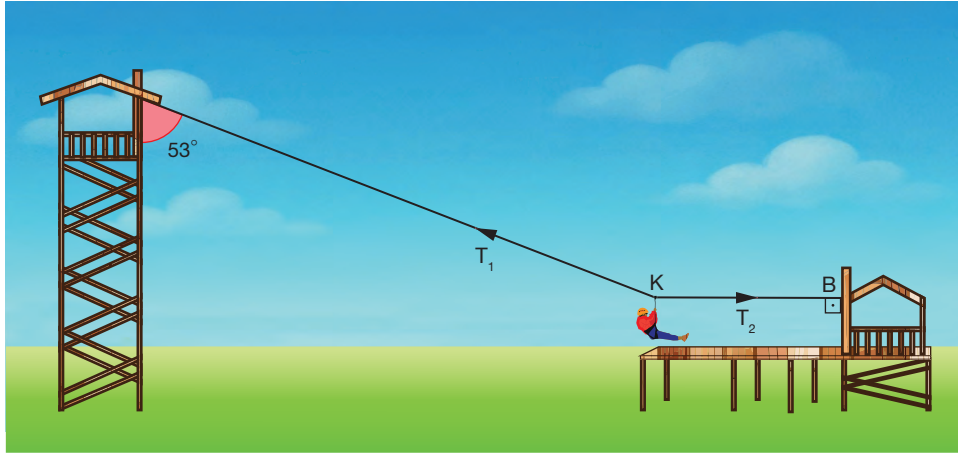




Kesişen kuvvetlerin etkisindeki bir cisimde sırasıyla F_1 , F_2 ve F_3 ile α , β ve θ nın sinüs değerlerinin oranı birbirine eşit olduğunda cisim dengede kalır.



T.C. Gençlik ve Spor Bakanlığı tarafından düzenlenen gençlik kamplarından birine katılan Deniz, doğa kampında yer alan ip parkuru etkinliğini gerçekleştirmek için görselde verilen yüksek platforma çıkmaktadır. Deniz'in ip üzerinde hareketsiz durabilmesi, üzerine etki eden kuvvetlerin yukarıdaki denge koşulunu sağlamasına bağlıdır.



Tüm güvenlik önlemleri alındıktan sonra ip ile bağlantısı sağlanan Deniz, kayarak bulunduğu noktadan daha alçaktaki diğer platforma doğru hareket ediyor. Kütlesi 60 kg olan Deniz, K noktasında sabit bir şekilde dengede kaldığına göre ip üzerinde oluşan T_1 gerilim kuvvetinin T_2 gerilim kuvvetinden kaç newton daha fazla olduğunu bulunuz. ($\sin 53^\circ \approx 0,8$ ve $\sin 37^\circ \approx 0,6$ ve $g \approx 10 \text{ m/sn.}^2$)

9. Çıkarımlarınızın geçerliliğini sözel, cebirsel ve grafiksel olarak değerlendiriniz.

Trigonometrik fonksiyonlarla ifade edilebilen denklemleri içeren Çalışma Kağıdı'na, Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na ve Akran Değerlendirme Formu'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.



13. Örnek

Bir cismin gölge boyu, cismin boyuna, bulunduğu konuma ve güneş ışınlarının geliş açısının ölçüsüne bağlıdır. Güneş ışınlarının düşme açısının ölçüsü x olmak üzere A ülkesinde bulunan h_1 boyundaki cismin gölge boyu $f(x) = a + h_1 \cdot \cot x$ ($a \in \mathbb{R}$) şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyon ile B ülkesinde bulunan h_2 boyundaki cismin gölge boyu $g(x) = b + h_2 \cdot \cot x$ ($b \in \mathbb{R}$) şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyon ile modellenmiştir. Aşağıda bazı açı ölçülerinin derece ve radyan türünden değerleri ile bu ölçülere bağlı kotanjant referans fonksiyonunun yaklaşık değerleri verilmiştir.

x	Derece	58°	59°	60°	61°	62°	63°	64°	65°
	Radyan	1,012	1,03	1,047	1,064	1,082	1,099	1,116	1,133
cot x		0,625	0,6	0,577	0,554	0,532	0,5	0,488	0,47

Güneş ışınlarının düşme açısının ölçüsünün 45° olduğu bir anda A ülkesinde bulunan cismin gölge boyu 104 cm, B ülkesinde bulunan cismin gölge boyu 100 cm olmaktadır. Güneş ışınlarının düşme açısının ölçüsünün 63° olduğu başka bir anda ise A ülkesinde bulunan cismin gölge boyu 54 cm, B ülkesinde bulunan cismin gölge boyu 55 cm olmaktadır.

Buna göre

1. f ve g fonksiyonlarının cebirsel temsillerini bulunuz.
2. A ve B ülkesinde bulunan cisimlerin gölge boylarının eşit olmasını sağlayan x açı ölçüsünün kaç radyan olduğunu cebirsel ve grafik temsilinden yararlanarak bulunuz.

Çözüm

1. Güneş ışınlarının düşme açısının ölçüsü 45° olduğunda gölge boyları sırasıyla $f(45^\circ) = 104$ cm ve $g(45^\circ) = 100$ cm, güneş ışınlarının düşme açısının ölçüsü 63° olduğunda gölge boyları sırasıyla $f(63^\circ) = 54$ cm ve $g(63^\circ) = 55$ cm olur.

Öncelikle $\cot 45^\circ = 1$, $\cot 63^\circ \approx 0,5$ değerleri kullanılarak f fonksiyonunun cebirsel temsilinin bulunabilmesi için $a + h_1 = 104$ ve $a + h_1 \cdot \frac{1}{2} = 54$ denklemleri ortak çözülür. Buradan $a = 4$, $h_1 = 100$ cm bulunur.

Buna göre f fonksiyonunun cebirsel temsili $f(x) = 4 + 100 \cdot \cot x$ olarak bulunur.

Benzer işlemler g fonksiyonunun cebirsel temsilini bulmak için tekrarlanır. $\cot 45^\circ = 1$, $\cot 63^\circ \approx 0,5$ değerleri kullanılarak $b + h_2 = 100$ ve $b + h_2 \cdot \frac{1}{2} = 55$ denklemleri ortak çözülür. Buradan $b = 10$, $h_2 = 90$ cm bulunur.

Buna göre g fonksiyonunun cebirsel temsili $g(x) = 10 + 90 \cdot \cot x$ olarak bulunur.

2. A ve B ülkelerinde bulunan cisimlerin gölgelerinin boylarının eşit olması için $f(x) = g(x)$ olmalıdır. Buna göre $4 + 100 \cdot \cot x = 10 + 90 \cdot \cot x$

$$10 \cdot \cot x = 6$$

$$\cot x = \frac{6}{10} \text{ bulunur.}$$

Tablodaki kotanjant referans fonksiyonu değerlerinden yararlanılarak x açı ölçüsü 1,03 radyan olarak bulunur.





Bu problem durumu çözümünün grafik temsili ile yapılabilmesi için matematik yazılımında aşağıdaki adımlar gerçekleştirilir.

1. adım: Giriş bölümüne $f(x) = 4 + 100 \cdot \cot x$ yazınız.

2. adım: Giriş bölümüne $g(x) = 10 + 90 \cdot \cot x$ yazınız.

3. adım: Araçlar sekmesinden **Kesiştir** aracı seçilip f ve g fonksiyonlarının üstüne tıklandığında fonksiyonların kesiştiği noktayı bulunuz.

Bu adımların matematik yazılımında uygulandığı benzer bir örneğin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



f ve g fonksiyon grafiklerinin kesişim noktasının apsis değerinin problem bağlamındaki anlamı, A ve B ülkesinde bulunan cisimlerin gölge boylarının eşit olması için güneş ışınlarının düşme açısının ölçüsü 1,03 radyan olması gerektiğidir.

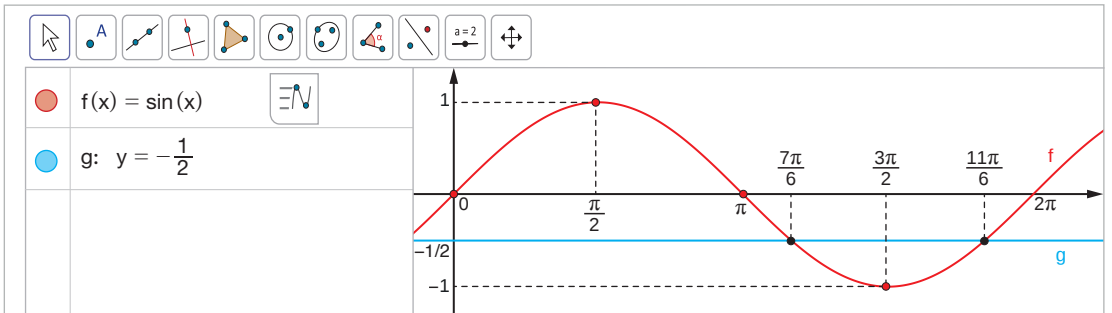
14. Örnek

$\forall x \in [0, 2\pi)$ olmak üzere $2 \cdot \sin x + 1 = 0$ denklemi veriliyor. Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Grafik temsillerinden yararlanarak denklemin çözüm kümesini bulunuz.
2. Cebirsel temsillerden yararlanarak denklemin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

1.



Görselde grafik temsili verilen $y = \sin x$ eğrisi ile $y = -\frac{1}{2}$ doğrusunun kesişim noktaları

$2 \cdot \sin x + 1 = 0$ denkleminin köklerini verir. Buna göre denklemin çözüm kümesi

$\mathcal{C} = \left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$ olarak bulunur.



2. $2 \sin x + 1 = 0$ denkleminde $\sin x = -\frac{1}{2}$ elde edilir. $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ olur. Bütünler iki açının sinüs değerleri birbirine eşittir. Buna göre $\sin x = \sin \frac{7\pi}{6}$ veya $\sin x = \sin \left(\pi - \frac{7\pi}{6} \right)$ yazılır. Sinüs trigonometrik referans fonksiyonunun periyodu 2π dir. Çözüm kümesi elde edilirken bu periyot kullanılır. $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ya da $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ elde edilir. Buna göre çözüm kümesi $\mathcal{C} = \left\{ x: x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ olarak bulunur. $x \in [0, 2\pi)$ için çözüm kümesi $\mathcal{C} = \left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$ olarak bulunur.

Sıra Sizde 8

1. $x \in [0, 2\pi)$ olmak üzere $2 \cdot \cos x - \sqrt{2} = 0$ denklemini veriliyor.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Grafik temsilinden yararlanarak denklemin çözüm kümesini bulunuz.

b) Cebirsel temsil kullanarak denklemin çözüm kümesini bulunuz.

2. $\cos 4x = \sin 2x + \frac{1}{2}$ denkleminin $[0, 2\pi)$ nda kaç farklı kökü olduğunu grafik temsilinden yararlanarak bulunuz.

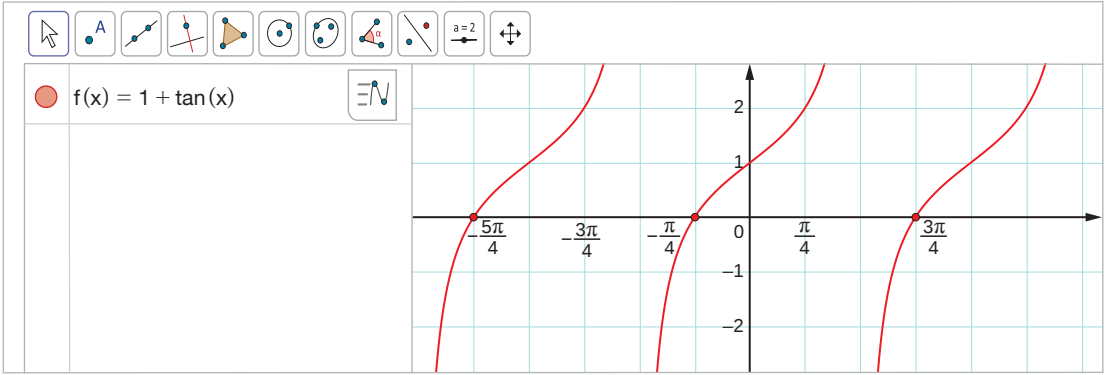
15. Örnek

Uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x) = \tan x + 1$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon veriliyor. Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Grafik temsilinden yararlanarak f fonksiyonunun sıfırlarını bulunuz.
2. Cebirsel temsil kullanarak $f(x) = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

1.



Görselde grafik temsili verilen $y = \tan x + 1 = 0$ eğrisinin x eksenine ile kesişim noktaları f fonksiyonunun sıfırlarını verir. Tanjant fonksiyonunun periyodu π olduğundan denklemin çözüm kümesi $\mathcal{C} = \left\{ \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ olur.

2. $f(x) = 2$ denklemini düzenlenirse $\tan x = 1$ elde edilir. $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ olduğundan $\tan x = \tan \frac{\pi}{4}$ eşitliği elde edilir. Tanjant trigonometrik referans fonksiyonunun periyodu π dir. Çözüm kümesi elde edilirken bu periyot kullanılır. Buradan $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ elde edilir. Buna göre çözüm kümesi $\mathcal{C} = \left\{ x: x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ olarak bulunur.

16. Örnek

$\tan 4x = \cot 5x$ denkleminin çözüm kümesini cebirsel yöntemler kullanarak bulunuz.

Çözüm

Birbirinden farklı trigonometrik fonksiyonlar içeren denklemlerde eşitliğin iki tarafı da aynı trigonometrik fonksiyona dönüştürülür.

$\cot \alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ olduğundan $\tan 4x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$ şeklinde yazılabilir. $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$4x = \frac{\pi}{2} - 5x + k\pi \Rightarrow 9x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{9}$ elde edilir. Buna göre çözüm kümesi

$\mathcal{C} = \left\{ x: x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{9}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ olarak bulunur.

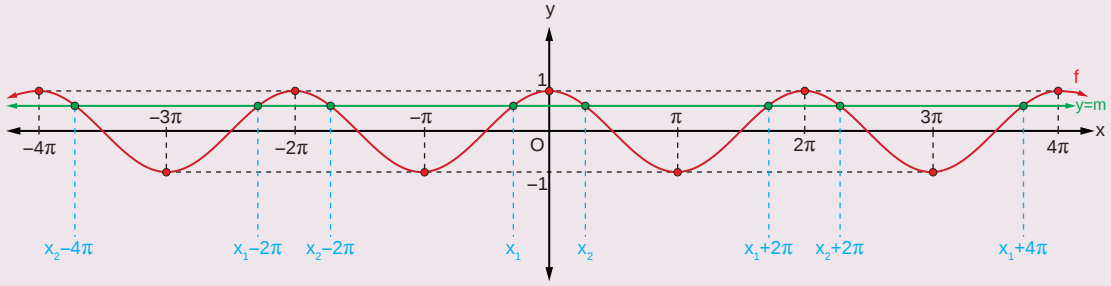
Sıra Sizde 9

Uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x) = 2 \cdot \cot x + 5$ trigonometrik fonksiyonunun $[-2\pi, 2\pi]$ ndaki sıfırlarının sayısını trigonometrik denklemlerin çözümü için oluşturulan stratejilerden yararlanarak bulunuz.

Konu ile ilgili videoya yandaki karekodan ulaşabilirsiniz.

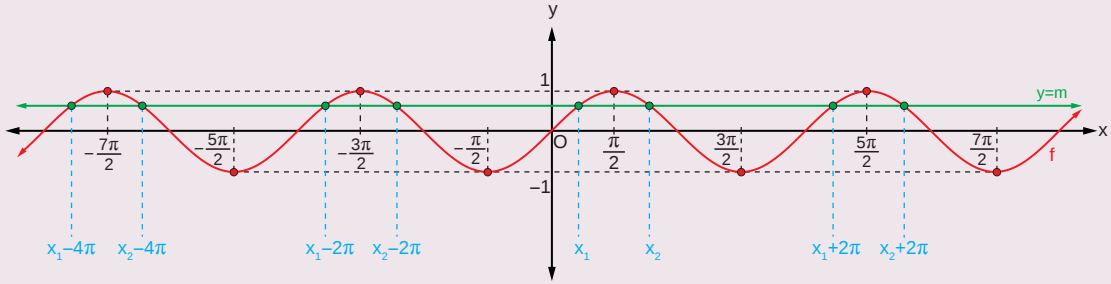


Kontrol Noktası



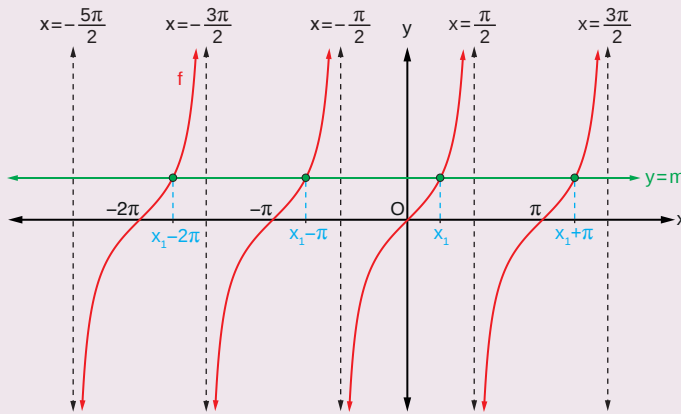
Grafik incelendiğinde m gerçekte sayı için $\cos x = m$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere denklem her $x = x_1 + 2k\pi$ ve $x = x_2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) gerçekte sayı için aynı değeri verir. Kosinüs referans fonksiyonu çift fonksiyon olduğundan $x_2 = -x_1$ olur. Buna göre

$m \in [-1, 1]$ için denklemin çözüm kümesi $\mathcal{C} = \{x: x = x_1 + 2k\pi \vee x = -x_1 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,
 $m \notin [-1, 1]$ için denklemin çözüm kümesi $\mathcal{C} = \emptyset$ olur.

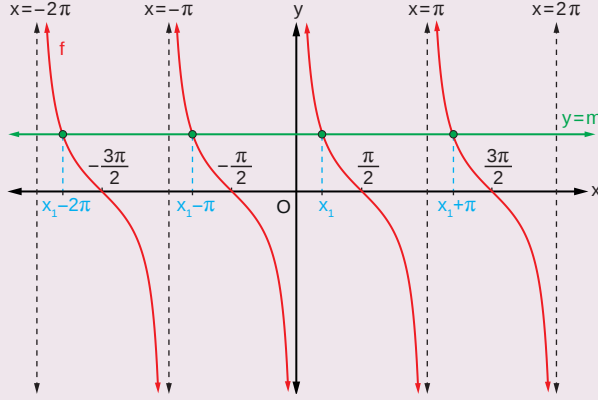


Grafik incelendiğinde m gerçekte sayı için $\sin x = m$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere denklem her $x = x_1 + 2k\pi$ ve $x = x_2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) gerçekte sayı için aynı değeri verir. Sinüs referans fonksiyonunun grafiği incelenerek $x_1 + x_2 = \pi$ eşitliği elde edilir. Buna göre

$m \in [-1, 1]$ için denklemin çözüm kümesi $\mathcal{C} = \{x: x = x_1 + 2k\pi \vee x = \pi - x_1 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,
 $m \notin [-1, 1]$ için denklemin çözüm kümesi $\mathcal{C} = \emptyset$ olur.



Grafik incelendiğinde m gerçekte sayı için $\tan x = m$ denkleminin kökü x_1 olmak üzere denklemin her $x = x_1 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) gerçekte sayı için aynı değeri verdiği görülür. Buna göre $m \in \mathbb{R}$ için denklemin çözüm kümesi $\mathcal{C} = \{x: x = x_1 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ olur.



Grafik incelendiğinde m gerçekte sayı için $\cot x = m$ denkleminin kökü x_1 olmak üzere denklemin her $x = x_1 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) gerçekte sayı için aynı değeri verdiği görülür. Buna göre $m \in \mathbb{R}$ için denklemin çözüm kümesi $\mathcal{C} = \{x: x = x_1 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ olur.

Alıştırmalar

- $2 \cdot \sin 4x - \sqrt{3} = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
- $x \in [0, 4\pi)$ olmak üzere $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$ denkleminin çözüm kümesinin kaç elemanlı olduğunu bulunuz.
- $x \in (0, 2\pi)$ nda $\cos^2 2x - 6 \cdot \sin 2x + 3 = 1 - \sin^2 2x$ denklemini sağlayan x değerlerini bulunuz.
- $\tan \frac{x}{2} \cdot \cot 4x = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Ek soruların yer aldığı 4. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.
(İçerik: Trigonometrik Referans Fonksiyonlardan Türetilen Fonksiyonlarla Oluşturulan Denklemler)

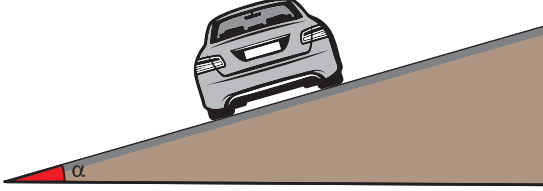


3. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları

Aşağıda temaya ait farklı türlerde 14 adet soru yer almaktadır.

1-11. bilgi ve becerileri ölçen soruları cevaplayınız.

1. Görseldeki sürtünmesiz eğimli viraj üzerinde V (m/sn.) hızıyla hareket eden araç, savrulmamak için güvenli hız limitine uymalıdır.



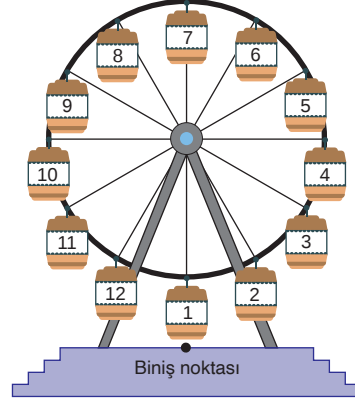
Güvenli hız limiti $V = \sqrt{\tan \alpha \cdot g \cdot r}$ ile hesaplanır. Burada α eğim açısının ölçüsü, g yer çekimi ivmesi ve r virajlı yolun yarıçap uzunluğudur. Eğim açısı ölçüsünün en az 5° , en fazla 10° olması planlanan bir yol için tanjant değerleri tablosu aşağıda verilmiştir. ($g \approx 10 \text{ m/sn.}^2$)

$\tan \alpha$	Yaklaşık Değer	$\tan \alpha$	Yaklaşık Değer
$\tan 5^\circ$	0,08	$\tan 8^\circ$	0,14
$\tan 6^\circ$	0,11	$\tan 9^\circ$	0,16
$\tan 7^\circ$	0,12	$\tan 10^\circ$	0,17

Buna göre

- a) Yarıçap uzunluğu 90 m olan bir virajda güvenli hız limitinin 12 m/sn. olması için virajın kaç derecelik eğimle yapılması gerektiğini bulunuz.
- b) Yarıçap uzunluğu 120 m olan bir viraj, 7° lik eğimle yapılıyor. Bu eğimli viraj için güvenli hız limitinin kaç m/sn. olduğunu bulunuz.

2. Bir eğlence merkezinde bulunan dönme dolapta eşit aralıklarla yerleştirilmiş 12 adet kabin bulunmaktadır.

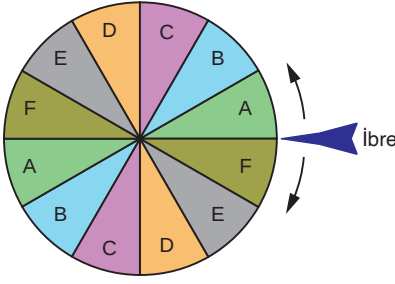


Dönme dolabın bir tam turu 120 saniyede tamamlanmaktadır.

Buna göre

- a) Buse 6 numaralı kabine bindikten 40 sn. sonra biniş noktasında duran Can'ın önünden geçebilecek kabin numaralarını bulunuz.
- b) Pozitif yönde dönmekte olan dönme dolabın 6. kabinine binen Buse'nin 9. kabinin başlangıçta bulunduğu konuma 3. kez gelmesi için dönme dolabın kaç derece dönmesi gerektiğini bulunuz.
- c) Negatif yönde dönmekte olan dönme dolapta Can 1. kabine, Buse ise 5. kabine binmiştir. Buse ve Can'ın ilk kez yatayda aynı hizaya gelmeleri için dönme dolabın kaç radyan dönmesi gerektiğini bulunuz.

3.



Aslıhan, Neslihan ve Emirhan oynayacakları bir oyunda yukarıdaki, eşit dilimlere ayrılmış çarkı döndüreceklerdir.

Her bir dilime karşılık gelen puan aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Dilim	A	B	C	D	E	F
Puan	50	60	70	80	90	100

Döndürme hareketi sonucunda ibre hangi dilimi gösteriyorsa oyuncu ilgili dilimin puanını kazanmaktadır. Döndürme hareketi sonucunda ibre, iki dilim arasında kalırsa oyuncu bu iki dilimin puanlarının aritmetik ortalamasını kazanmaktadır. Her bir döndürme hareketinden önce çark görseldeki konuma getirilmektedir.

Buna göre

- a) Aslıhan çarkı pozitif yönde 1720 derece döndürmüştür.

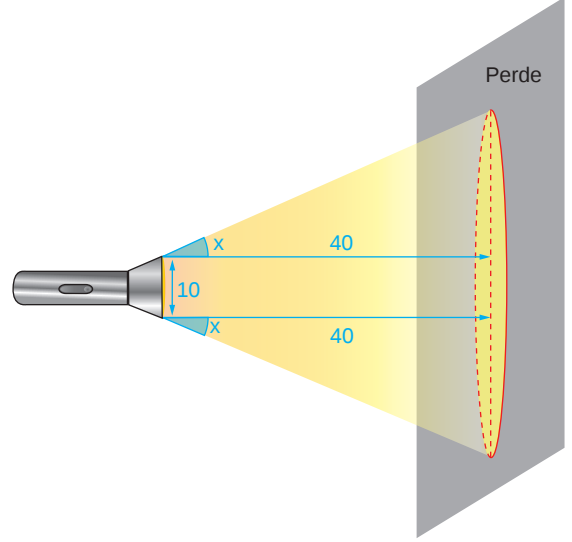
Buna göre Aslıhan'ın kaç puan kazanacağını bulunuz.

- b) Neslihan çarkı negatif yönde 1560 derece döndürmüştür.

Buna göre Neslihan'ın kaç puan kazandığını bulunuz.

- c) Çarkı en fazla bir tam tur döndürmeyi ve 100 puan kazanmayı hedefleyen Emirhan'ın çarkı pozitif yönde çevirmesi gereken açının derece cinsinden ölçüsünün aralığını bulunuz.

4. Çap uzunluğu 10 cm olan özel yapım bir el fenerinin 40 cm uzağına görseldeki gibi bir perde yerleştirilmiştir. El fenerinin yayılma açısının ölçüsü x olmak üzere x arttıkça el fenerinin perdede aydınlatığı bölgenin çap uzunluğu artmakta, ışık şiddeti ise azalmaktadır.



x açısının ölçüsüne bağlı ışık şiddetini veren fonksiyon $f(x) = 138 - 100 \cdot \tan x$ candela (cd) olarak modellenmiştir.

Aşağıda bazı açı ölçülerinin derece türünden değerleri ile bu ölçülere bağlı tanjant referans fonksiyonunun yaklaşık değerleri verilmiştir.

x	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°
$\tan x$	0,38	0,40	0,42	0,44	0,46	0,48	0,50

Buna göre

- a) $x = 22^\circ$ olduğunda el fenerinin perdede aydınlatığı bölgenin çap uzunluğunun yaklaşık kaç cm olacağını bulunuz.
- b) El fenerinin perdede aydınlatığı bölgenin çap uzunluğu 50 cm olduğunda x in kaç derece olacağını bulunuz.
- c) $x = 21^\circ$ iken ışık şiddetinin %10 azalması için x in kaç derece artırılması gerektiğini bulunuz.

5. A ve B radyo istasyonlarındaki radyo vericileri, zamana bağlı olarak değişik frekanslarda sinyaller göndermektedir. Aynı anda çalıştırılan bu radyo vericileri için t , geçen zaman (saniye) olmak üzere A istasyonundaki radyo vericisinin zamana bağlı Hertz (Hz) cinsinden frekans fonksiyonu $f(t) = 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{10}\right) + 360$, B istasyonundaki radyo vericisinin zamana bağlı Hertz (Hz) cinsinden frekans fonksiyonu ise $g(t) = 70 \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{25}\right) + 150$ şeklinde tanımlanmıştır.

Buna göre

- a) A istasyonundaki radyo vericisinin en düşük frekansı ile B istasyonundaki radyo vericisinin en yüksek frekansı arasındaki farkın kaç Hertz olduğunu bulunuz.
- b) Radyo vericilerinin çalışmaya başlamasından 5 dakika sonra cihazların frekans değerleri toplamının kaç Hertz olacağını bulunuz.
- c) Radyo vericilerinin yayınlarını kaydeden bir cihazın frekans değerleri incelendiğinde değerlerin belirli zaman aralıklarında kendini tekrar ettiği gözlenmiştir. A ve B istasyonlarındaki değerlerin tekrar ettiği en küçük zaman aralıklarını bulunuz.

6. Bir ayrıtının uzunluğu 30 cm olan küp şeklindeki 4 eş blok şekilde gösterildiği gibi üst üste konulmuştur.

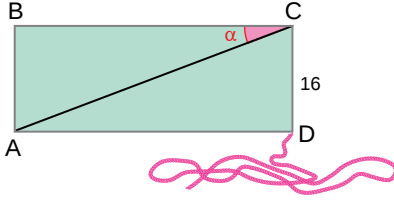


Bir ucu A noktasında sabitlenen yeşil ip; uzunluğu en kısa olacak şekilde blokların etrafına sarılarak ipin diğer ucu, taban düzlemindeki küpün bir ayrıtının üzerindeki B noktasında sabitleniyor. A noktasındaki ipin düşey ayrıt ile yaptığı açının ölçüsü x derecedir. $\cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \frac{4}{5}$ veriliyor.

Buna göre

- a) B noktasının en yakın köşeye uzaklığının kaç cm olduğunu bulunuz.
- b) İpin uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

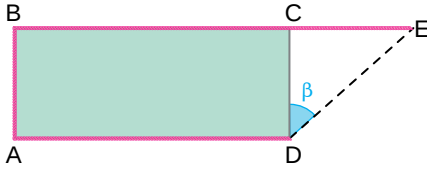
7. Şekil 1'de D köşesine bağlı ve uzunluğu 92 cm olan bir ipin bulunduğu ABCD dikdörtgeni verilmiştir.



Şekil 1

$$|DC| = 16, m(\widehat{BCA}) = \alpha, \tan(180^\circ - \alpha) = -\frac{8}{15}$$

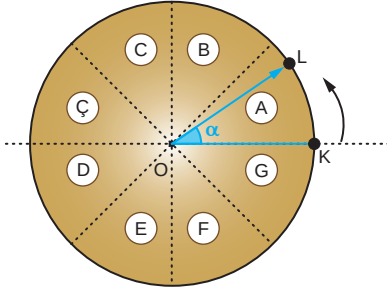
İp gergin biçimde sırasıyla A, B ve C köşelerinden geçecek şekilde dikdörtgenin etrafına sarılıyor. Sonrasında ip; Şekil 2'deki gibi B, C ve E noktaları doğrusal olmak üzere yine gergin hâle getiriliyor.



Şekil 2

Buna göre $m(\widehat{CDE}) = \beta$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.

8.



Müzeyyen $a \in [0, 2\pi)$ nda aşağıdaki eşitsizliklerden en az birini sağlayan A, B, C, ... ,G bölgeleri görseledeki K noktasından başlayarak pozitif yönde $m(\widehat{KOL}) = \alpha$ açı ölçüsü kadar hareket eden $[OL$ boya kadranı ile boyayacaktır.

- I. $\sin \alpha \geq 0$
- II. $\cos \alpha \geq \sin \alpha$
- III. $\tan \alpha > 1$

Buna göre boya yapılmayacak bölgeyi bulunuz.

9. Bir matematik öğretmeni, öğrencisinden aşağıdaki önermeyi ispatlamasını istemiştir.

" $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 1 - 3 \cdot \sin \frac{x}{2}$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun görüntü kümesi $[-2, 4]$ dır."

Öğrenci de önermeyi altı adımda ispatlamıştır.

1. adım:

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = \sin x$ trigonometrik referans fonksiyonunun görüntü kümesi $[-1, 1]$ dir. Bundan dolayı $-1 \leq \sin x \leq 1$ olur.

2. adım:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sin \frac{x}{2} \leq 1 \text{ olur.}$$

3. adım:

$$-1 \leq \sin \frac{x}{2} \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \cdot \sin \frac{x}{2} \leq 3 \text{ olur.}$$

4. adım:

$$-3 \leq 3 \cdot \sin \frac{x}{2} \leq 3 \Rightarrow -2 \leq 3 \cdot \sin \frac{x}{2} - 1 \leq 4 \text{ olur.}$$

5. adım:

$$-2 \leq 3 \cdot \sin \frac{x}{2} - 1 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq 1 - 3 \cdot \sin \frac{x}{2} \leq 4 \text{ olur.}$$

6. adım: $-2 \leq 1 - 3 \cdot \sin \frac{x}{2} \leq 4$ olduğundan g fonksiyonunun görüntü kümesi $[-2, 4]$ olur.

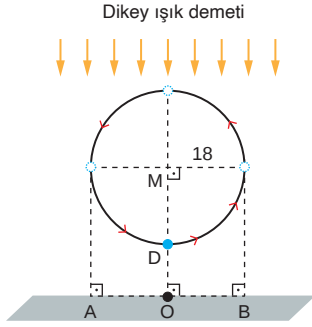
Öğretmeni ispatın yanlış olduğunu söyleyerek öğrencinin yaptığı hatayı düzeltmesini istemiştir.

Buna göre

a) Öğrenci ilk hangi adımda hata yapmıştır?

b) Öğrencinin hata yaptığı ilk adımın doğru hâlini yazınız.

10. Aşağıda yarıçap uzunluğu 18 metre olan M merkezli çember üzerindeki D noktasında bulunan bir kuşun ok yönünde sabit hızdaki hareketi gösterilmektedir.



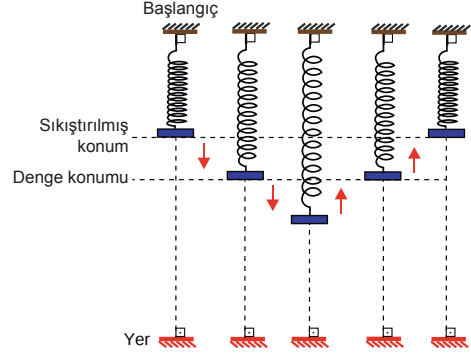
Dikey ışık demeti altında kuşun zeminde oluşturduğu gölge, [AB] üzerindeki noktalara düşmektedir. $|AO| = |OB|$ ve t , zaman (saniye) olmak üzere kuşun zeminde oluşturduğu gölgenin O noktasına olan uzaklığı (m) $f(t) = \left| a \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{k}\right) \right|$ fonksiyonu ile hesaplanmaktadır. Kuş, bir tam turu 30 saniyede tamamlamaktadır. (Gölgenin genişliği ihmal edilecektir.)

Buna göre

- a) $|a \cdot k|$ işleminin sonucunu bulunuz.

- b) Kuşun gölgesinin O noktasına olan uzaklığı ilk kez kaçinci saniyede $9\sqrt{3}$ metre olur?

11. Sürtünmesiz düşey düzlemde ucuna bir cisim asılan yay, denge konumunda belli bir miktar sıkıştırıldıktan sonra serbest bırakılıyor. Cismin denge konumuna göre aşağı ve yukarı yönde hareket ettiği gözlemleniyor.



t , yayın sıkıştırılmış hâlinde sonra geçen zaman (saniye) olmak üzere cismin zamana bağlı olarak yerden yüksekliği (cm) $h(t) = 70 + 20 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ fonksiyonu ile modellenmiştir.

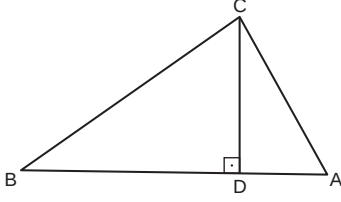
(Sistemde enerji kaybı olmadığı varsayılmaktadır.)

Buna göre

- a) Cismin ulaşabildiği en yüksek ve en alçak mesafe arasındaki farkın kaç cm olduğunu bulunuz.
- b) Cismin serbest bırakıldıktan sonra başlangıç konumuna ilk kez kaçinci saniyede geleceğini bulunuz.
- c) Cismin serbest bırakıldıktan kaç saniye sonra ikinci kez yerden 70 cm yükseklikte olacağını bulunuz.

12-14. çoktan seçmeli soruları cevaplayınız.

12. Aşağıda bir ABC üçgeni verilmiştir.

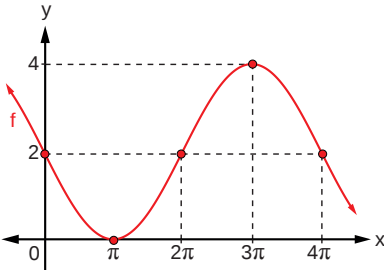


$[CD] \perp [BA]$ olacak şekilde $D \in [BA]$ noktası verilmiştir. $m(\widehat{DBC}) = x$, $m(\widehat{DAC}) = y$, $|BD| = 4$ birim, $|DC| = 2$ birim ve $|DA| = 1$ birim veriliyor.

Buna göre aşağıdaki ifadelerden hangisi yanlıştır?

- A) $\cos(2x + y) = -\sin x$
- B) $\sin(2x + 3y) = -\sin y$
- C) $\tan(3x + 5y) = \tan 2y$
- D) $\cot(5x + 4y) = \cot x$
- E) $\cos(3x + 2y) = -\cos x$

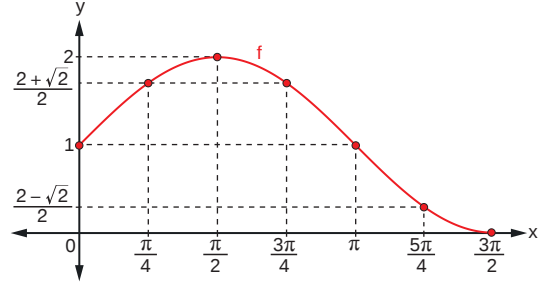
13. Aşağıda grafiği verilen fonksiyon $k > 0$, $n \neq 0$, $n \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = m + n \cdot \sin kx$ şeklinde tanımlanmıştır.



Buna göre $m + n + k$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) $-\frac{1}{2}$
- B) $\frac{1}{2}$
- C) $\frac{3}{2}$
- D) 2
- E) 3

14. $f: \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow [0, 2]$, $f(x) = 1 + \sin x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği aşağıda verilmiştir.



Buna göre f fonksiyonu ile ilgili

- I. bire birdir.
- II. örtendir.
- III. en büyük değeri 2'dir.
- IV. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$

önergelerinden hangileri doğrudur?

- A) I ve II
- B) II ve III
- C) I, II ve IV
- D) II, III ve IV
- E) III ve IV

Tema ile ilgili daha fazla soruya yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

